Расширения полей и теория Галуа. 8 ноября

1. а) Вычислите размерность поля разложения многочлена $x^p - 1$, где p — простое число, над полем $\mathbb{Q}$.
б) Вычислите группу Галуа этого многочлена.

2. Вычислите размерность поля разложения многочлена $x^n - 1$, где n — произвольное число, над полем $\mathbb{Q}$.

3. Дана последовательность расширений $K = K_n \supset K_{n-1} \supset K_{n-2} \cdots \supset K_0 = \mathbb{Q}$, где каждое расширение $K_{i+1} \supset K_i$ имеет степень 2. Докажите, что в поле K не может лежать корень неприводимого кубического многочлена с рациональными коэффициентами.

4. Докажите, что с помощью циркуля и линейки нельзя построить отрезок $a\sqrt[3]{2}$, где a — данный отрезок.

5. Пусть $K = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — алгебраическое расширение поля k, характеристика которого равна 0. Докажите, что существует элемент $\theta \in K$, для которого $K = k(\theta)$.

Конечную группу G называют *разрешимой*, если существует такая последовательность вложенных подгрупп

$$\{e\} = G_r \subset G_{r-1} \subset \cdots \subset G_0 = G,$$

что G_i — нормальная подгруппа в G_{i-1} и факторгруппа G_{i-1}/G_i абелева (при $i = 1, \ldots, r$).

6. Докажите, что группы подстановок S_3 и S_4 разрешимы, а группа S_n при $n \geqslant 5$ неразрешима.

Группа $G \subset S_n$ называется *транзитивной*, если для любых двух индексов $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ существует подстановка $\sigma \in G$, для которой $\sigma(i) = j$.

7. Докажите, что многочлен f без кратных корней неприводим тогда и только тогда, когда его группа Галуа транзитивна.

8. Докажите, что если число n простое и транзитивная группа $G \subset S_n$ содержит хотя бы одну транспозицию (i, j), то $G = S_n$.

9. Пусть f — неприводимый многочлен над $\mathbb{Q}$ простой степени p, причем у f есть ровно два невещественных корня. Докажите, что группа Галуа многочлена f над $\mathbb{Q}$ равна S_p.

10. Докажите, что многочлен $x^5 - 4x + 2$ над $\mathbb{Q}$ имеет группу Галуа S_5.