Разные задачи от 29.11.2001.

Задача 1. Докажите, что подгруппа индекса 2 нормальна.
Задача 2. Докажите, что порядок подгруппы делит порядок группы и что порядок любого элемента группы тоже делит порядок группы.
Задача 3. Описать все группы порядка 6, p, p^2, pq, 12.
Задача 4. Если $|G|$ делится на простое число p, то в группе G найдется элемент порядка p.
Задача 5. Для группы S_n найдите: центр, коммутант, все подгруппы индекса 2, все нормальные подгруппы.
Задача 6. Докажите, что подгруппа разрешимой группы разрешима.
Задача 7. Докажите, что фактор разрешимой группы по нормальной подгруппе разрешим.
Задача 8. Пусть H — нормальная разрешимая подгруппа в G и фактор G/H — разрешимая группа. Докажите, что G — разрешима.
Задача 9. Верно ли что группа Галуа неприводимого многочлена — циклическая.

Экзамен 1, алгебра, I курс, I семестр декабрь 2001.

1. Существует ли в симметрической группе S_{13} элемент порядка 56?

2. Найдите все делители нуля в алгебре $M_2(\mathbb{R})$ (алгебре матриц порядка 2 над полем $\mathbb{R}$).

3. Есть ли в поле $\mathbb{F}_8$, состоящем из 8 элементов, подполе $\mathbb{F}_4$, состоящее из 4 элементов?

4. Пусть A — алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом $\{1, i, j, k\}$ и такой же таблицей умножения, как в алгебре кватернионов. Докажите, что алгебра A изоморфна $M_2(\mathbb{C})$ (алгебре матриц порядка 2 над полем $\mathbb{C}$).

5. Найдите все двусторонние идеалы алгебры матриц порядка 3 над полем $\mathbb{R}$. (Двусторонний идеал алгебры A — это линейное подпространство I, для которого $AI = IA = I$.)

6. Найдите размерность поля разложения L многочлена $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$ и вычислите группу Галуа $G(L, \mathbb{Q})$.

7. Пусть α_1 и α_2 — целые алгебраические числа, а θ — корень многочлена $x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 = 0$. Докажите, что θ — целое алгебраическое число.

8. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени d над полем $\mathbb{F}_q$, состоящем из q элементов, q — простое. Докажите, что $f(x)$ делит $x^{q^d} - x$ и, наоборот, если $f(x)$ делит $x^{q^n} - x$, то d делит n.

9. Пусть $SL(2, \mathbb{R})$ — группа матриц порядка 2 с вещественными коэффициентами и с определителем 1. Докажите, что группа $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$, где I — единичная матрица, простая, т.е. у неё нет нетривиальных нормальных подгрупп.

Экзамен 2, алгебра, I курс, I семестр 8 марта 2002г.

1) Найти число решений уравнения $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$ в поле из 9 элементов.

2) Пусть O — группа симметрий куба, а T — группа симметрий правильного тетраэдра. Доказать, что
$$O = T \times \mathbb{Z}_2.$$

3) Существует ли такой мономорфизм φ группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ в группу $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, что $G/\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

4) Пусть A — конечномерная алгебра с единицей. Показать, что всякий её элемент либо является делителем нуля, либо обратим. Привести пример бесконечномерной алгебры, где это не так.

5) Пусть θ — корень уравнения $x^3 + x + 21 = 0$. Будет ли θ^{-1} целым алгебраическим числом?

6) Рассмотрим подгруппу Γ' группы $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, состоящую из матриц вида
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \equiv d \equiv 1 \pmod 2, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod 2.$$
Доказать, что Γ' — нормальная подгруппа и вычислить её индекс (порядок факторгруппы Γ/Γ').

7) В кольце многочленов над полем $GF(2)$ рассмотрим неприводимый делитель $p(x)$ ($\deg p(x) > 0$) многочлена $x^{2^n} + x + 1$. Доказать, что степень многочлена $p(x)$ делит $2n$, но не делит n.

8) Пусть поле K содержит первообразный корень степени n из 1, и α — корень многочлена $x^n - a$, $a \in K$. Доказать, что

   а) $L = K[\alpha]$ — нормальное расширение поля K;

   б) группа $Gal(L/K)$ — циклическая группа, и её порядок делит n.

9) Пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{2002} = 0.$ Доказать, что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0.$