Высший Колледж Математики

Математический анализ, 2-й курс, 5 сентября 2001 г.

Определения.

1. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким подмногообразием* размерности m, если для каждой точки $x \in M$ существует ее окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что пересечение $M \cap U$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

у которой ранг матрицы частных производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ максимален (говорят, что M ««« класса C^k, бесконечно дифференцируемое или аналитическое, если функции f_i имеют соответствующий класс гладкости).

2. Пересечение $M \cap U$ однозначно проектируется на одну из m@-мерных координатных плоскостей, а оставшиеся $n-m$ координат выражаются через данные как гладкие функции.

3. Для любой меньшей окрестности $\tilde{U} \subset U$ точки x пересечение $M \cap \tilde{U}$ является взаимно однозначным образом при гладком отображении максимального ранга $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, где $V \subset \mathbb{R}^m$ ««« некоторая область. Такое отображение φ вместе с областями $V \subset \mathbb{R}^m$ и $\tilde{U} \cap M \subset M$ называется *картой*, а произвольная совокупность карт, покрывающих M««« *атласом*. (Ясно, что из определения 2 немедленно следует существование отображения φ для окрестности U, а, значит, и для любой меньшей окрестности. Однако, если не потребовать выполнения условия 3 для *всех* меньших окрестностей, можно получить подмножество типа обмотки тора);

4. Существует (криволинейная) система координат в U, в которой $M \cap U$ есть координатная m-мерная плоскость $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$;

5. Пересечение $M \cap U$ задается системой уравнений $\{f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, такой, что ранг матрицы частных производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ равен ровно $n-m$ в каждой точке $x \in U$ (количество уравнений, вообще говоря, может даже быть бесконечным).

Задачи.

1. Докажите эквивалентность определений 1–5.

В последующих задачах определите, при каких условиях данные множества являются многообразиями, найдите размерность, определите карты и локальные координаты.

2. Окружность $x^2 + y^2 = R^2$; сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$.

3. Поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = a$.

4. Множество

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = a, \\ x + y + 2z + u = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0. \end{cases}$$

5. Подмножества $SL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $SL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ квадратных матриц с вещественными и комплексными элементами соответственно, состоящее из матриц с единичным определителем.

6. Подмножество $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n^2}$ матриц с нулевым определителем; подмножество $\Sigma \setminus \{0\}$.

7. Множества $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $U(n) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ ортогональных и унитарных матриц соответственно ($AA^* = E$). (Указание: посчитать ранг дифференциала отображения $f : A \mapsto AA^*$, для начала ««« в точке E).

8. Множество в $\mathbb{R}^{2n}$, заданное уравнениями

$$\begin{cases} z_1^2 + \cdots + z_n^2 = a, \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1. \end{cases}$$

Определение. Отображение $M \to N$ называется *гладким*, где $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$««« гладкие подмногообразия, если в каждой локальной карте оно задается гладкими функциями. Подмногообразия M и N называются *диффеоморфными*, если между ними существует биективное отображение, гладкое вместе с обратным.

Вопрос. Обязан ли образ вложенного подмногообразия при гладком отображении быть подмногообразием?

Это приводит нас к следующему общему понятию.

Определение. *Гладким многообразием* размерности n называется связное множество M, на котором задан класс эквивалентных атласов. Задание атласа (состоящего из согласованных карт) означает, что M представленно в виде объединения $M = \cup U_\alpha$ подмножеств U_α, для каждого из которых заданно взаимно однозначное соответствие $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$««« открытая область евклидова пространства. Тройки $(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$ (а иногда и сами подмножества U_α) называются *картами*. При этом разные карты должны быть согласованы: если $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то отображения $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ (функции перехода) должны быть диффеоморфизмами областей евклидова пространства (в частности, оба подмножества $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ и $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ должны быть открыты). Два атласа называются эквивалентными, если их объединение тоже является атласом (т. е. если любая карта из первого атласа согласована с любой картой второго).

Наличие атласа превращает многообразие в топологическое пространство. Обычно требуется (и мы будем следовать этим соглашениям) выполнение двух дополнительных условий: *сепарабельности* и *отделимости*. На языке карт первое условие означает, что существует атлас, состоящий из не более, чем счетного числа карт. Второе означает, что для любых двух точек найдется допустимый атлас, в котором эти точки принадлежат различным непересекающимся картам.

Замечание. В зависимости от класса гладкости отображений $\varphi_{\alpha\beta}$ многообразия делятся на *топологические*, C^p-*гладкие*, *бесконечно гладкие* и *аналитические*. При этом последние три класса многообразий эквивалентны в следующем смысле: если некоторые два многообразия с некоторыми структурами на них диффеоморфны, то можно на этих многообразиях ввести (согласованные с исходными) структуры любой другой (одинаковой) гладкости с тем, чтобы они снова были диффеоморфны. Но существуют такие гомеоморфные топологические многообразия, на которых нельзя ввести даже C^1-гладкой (согласованной с исходной) структуры с тем, чтобы эти многообразия стали диффеоморфны.

9. Дайте определения гладких отображений гладких многообразий, диффеоморфизма гладких многообразий.

10. Для окружности $x^2 + y^2 = 1$ постройте три атласа: а) когда локальные координаты — это координаты x и y; б) когда локальные координаты угловые; в) когда отображения φ_α ««« стереографические проекции. Докажите эквивалентность этих атласов. Для каждого из них вычислите функции перехода.

11. Докажите, что связное одномерное многообразие диффеоморфно интервалу или окружности.

12. Докажите, что если M компактно, то M диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

13. Докажите, что если n-мерное многообразие M является подмногообразием евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ с $N > 2n + 1$, то в $\mathbb{R}^N$ существует такое направление l, проекция M вдоль которого задает вложение M в $\mathbb{R}^{N-1}$.

14. Определите структуру гладкого (трёхмерного) многообразия на следующих множествах. Какие из них диффеоморфны?

а) Сфера S^3.

б) Проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ (пространство прямых в $\mathbb{R}^4$).

в) Прямое произведение $S^1 \times S^2$.

г) Группа $SO(3)$ вращений трехмерного пространства (ортогональных 3×3 матриц).

д) Группа $SU(2)$ эрмитовых 2×2 матриц.

е) Пространство касательных единичных векторов к единичной сфере.

ж) Подмножество в $\mathbb{C}^3$, заданное уравнениями $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$; $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2$.

з) Пространство конфигураций твердого тела с одной закрепленной точкой.