Высший Колледж Математики

Математический анализ, 2-й курс, 12 сентября 2001 г.

Определения. *Касательным вектором* к многообразию M в точке $x \in M$ называется

««« Класс эквивалентных кривых, выходящих из этой точки;

««« Правило, относящее каждой карте, содержащей данную точку, набор из $n = \dim M$ чисел $(a_1, \ldots, a_n)$, изменяющихся при переходе от карте к карте по известным правилам (этот набор принято записывать в виде $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$);

«««« Дифференцирование, то есть $\mathbb{R}$-линейное отображение D пространства гладких функций на M в множество чисел $\mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g).$$

Если M задано как вложенное подмногообразие в $\mathbb{R}^N$, то касательный вектор««« это вектор в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^N$, приложенный к точке $x \in M \subset \mathbb{R}^N$, такой, что содержащая этот вектор прямая касается M.

Множество касательных векторов в данной точке x многообразия M образуют n-мерное векторное пространство, называемое *касательным пространством* многообразия M в точке x, обозначаемое через $T_x M$. Заметим, что касательное пространство определено только для гладких многообразий, а для топологических многообразий оно, вообще говоря, не определено.

Задачи.

1. Уточните приведенные выше определения по аналогии с понятием касательного вектора к пространству $\mathbb{R}^n$, приводимого в прошлом семестре. Восстановите, в частности, правило замены координат касательного вектора. Докажите эквивалентность приведенных определений.

2. Для гладкого отображения $f : M \to N$ можно определить его производную (обозначаемую df или f_*), как линейное отображение

$$f_* T_x M \to T_{f(x)} N.$$

Дайте определение производной в терминах каждого из определений касательных векторов, приведенных выше.

3. Докажите цепное правило: производная композиции отображений равна композиции производных. Если $f : M \to N$ и $g : N \to L$ — гладкие отображения, то

$$(gf)_* = g_* f_* : T_x M \to T_{g(f(x))} L.$$

4. Совокупность касательных векторов во всех точках многообразия M образует пространство TM, называемое *касательным расслоением* многообразия M. Касательное расслоение является гладким $2n$-мерным многообразием. Задайте на нем атлас, то есть карты и функции перехода.

5. Проективным пространством P^n называется совокупность всех прямых (одномерных подпространств) в векторном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Прямая, проходящая через точку $(x_0, \ldots, x_n)$, обозначается через

$$[x_0 : \cdots : x_n] \in P^n.$$

Задайте в P^n структуру гладкого многообразия, то есть определите карты и функции перехода. Как преобразуются базисные касательные векторы при переходе от карты к карте? Придумайте атлас, содержащий наименьшее количество карт.

6. Приведите пример гладкой функции $P^n \to \mathbb{R}$. Придумайте набор таких функций, осуществляющих вложение $P^n \to \mathbb{R}^N$ для некоторого достаточно большого N. Насколько можно уменьшить N?

7. Проективное пространство является простейшим примером многообразия, которое изначально определяется не как вложенное, а как абстрактное многообразие (хотя оно, как и всякое многообразие, допускает вложение в евклидово пространство). Другим примером такого рода является *многообразие Грассмана* $G_{k,n}$, определяемое как совокупность k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. В частности, $G_{1,n} = P^{n-1}$. Задайте атлас на многообразии Грассмана. Какова его размерность?