Высший Колледж Математики

Математический анализ, 2-й курс, 19 сентября 2001 г.

Определение. Говорят, что на многообразии M задано *векторное поле*, если в каждой его точке задан касательный вектор, гладко зависящий от точки приложения. В координатах некоторой карты векторное поле однозначно представляется в виде

$$v = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

где a_i ««« гладкие функции.

1. Покажите, что производная функции вдоль векторного поля $v \mapsto vf$ является дифференцированием кольца функций (со значениями опять в кольце функций), то есть эта операция $\mathbb{R}$-линейна и удовлетворяет правилу Лейбница. Обратно, всякое дифференцирование кольца функций задается некоторым векторным полем.

2. Композиция двух дифференцирований дифференцированием не является. Покажите, однако, что коммутатор $f \mapsto uvf - vuf$ дифференцирований опять является дифференцированием, то есть задается производной по направлению некоторого поля w. Векторное поле w называется *коммутатором* векторных полей u, v и обозначается через $w = [u, v]$.

3. Покажите, что на прямой $[u(x)\frac{\partial}{\partial x}, v(x)\frac{\partial}{\partial x}] = (uv' - vu')\frac{\partial}{\partial x}$, Найдите координатное выражение для коммутатора полей на n-мерном многообразия для произвольного n.

4. Докажите, что операция взятия коммутатора билинейна, кососоммутативна, $[u, v] = -[v, u]$, и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

для произвольных полей u, v, w (говорят, что векторные поля образуют *алгебру Ли*).

Определение. Фазовой (интегральной) кривой векторного поля v называется кривая, касательный вектор которой в каждой своей точке совпадает с вектором поля v в этой точке. Таким образом, для отыскания фазовой кривой $y(t)$ нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{y}(t) = v(y(t))$, которое есть краткая запись для системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = v_1(y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n(t) = v_n(y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{cases}$$

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений есть ни что иное, как теория векторных полей и их фазовых кривых.

5. Изобразите фазовые кривые поля $y\frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y}$.

Теорема (основная теорема теории ОДУ). *У всякого гладкого векторного поля существует и единственна фазовая кривая, выходящая из заданной начальной точки, гладко зависящая от начальной точки.*

Замечания. 1) Предполагается, что поле принадлежит классу гладкости C^k, $k \geq 1$. В этом случае решения дифференциального уравнения (т.е. фазовые кривые) принадлежат классу гладкости C^{k+1}.

2) В заключении теоремы предполагается, что решение определено при малых значениях t. Если многообразие компактно, то фазовая кривая определена при всех $t > 0$. На некомпактном многообразии возможен другой случай: решение за конечное время может ¡¡уйти на бесконечность¿¿, то есть достичь границы любого наперед заданного компакта.

Обозначим фазовую траекторию поля v с началом в точке x через $g_v^t(x)$. Строго говоря, диффеоморфизм g_v^t (называемый *фазовым преобразованием*) определен лишь в случае, когда многообразие M компактно. В общем случае этот диффеоморфизм можно задать лишь в некоторой области и лишь при малых значениях t. Это обстоятельство мы всегда будем иметь ввиду, не оговаривая каждый раз особо.

6. Покажите, что семейство диффеоморфизмов $g_v^t : M \to M$ (называемое *фазовым потоком*), $t \in \mathbb{R}$ образует (коммутативную) группу, $g_v^t g_v^s = g_v^{t+s}$.

Фазовый поток переносит с собой все дифференциально-геометрические объекты, заданные на многообразии (функции, поля, и т.д.). Производная при $t = 0$ от полученного семейства объектов называется производной Ли L_v, или производной рыбака вдоль поля v. В частности, пусть $u_t(x) = (g_v^{-t})_* u(y)$, где $y = g_v^t x$ и $(g_v^{-t})_* : T_y M \to T_x M$««« производное отображение. Тогда $L_v u = \frac{d}{dt}|_{t=0} u_t$.

7. Докажите равенство $l_u v = -L_v u = [u, v]$.

8. Фазовые потоки разных полей, вообще говоря, не коммутируют. Покажите, что коммутатор векторных полей измеряет степень их некоммутативности,

$$g_v^{-\varepsilon} g_u^{-\varepsilon} g_v^{\varepsilon} g_u^{\varepsilon} x = x + \varepsilon^2 [u, v](x) + o(\varepsilon^2).$$

9. Самолет вылетел из пункта A, находящегося на широте φ, пролетел $\varepsilon = 100$ километров на север, затем столько же на восток, на юг и на запад соответственно. Где он в результате очутился? Определите с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Выразите в сферических координатах выражения для векторных полей u, v единичной длины, направленных на север и восток соответственно. Найдите фазовые потоки этих полей, вычислите диффеоморфизм $g_v^{-\varepsilon} g_u^{-\varepsilon} g_v^{\varepsilon} g_u^{\varepsilon}$ и коммутатор $[u, v]$.