Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 9 декабря 2001 года

Письменный экзамен

1. γ — замкнутый путь на плоскости, такой, что $\oint_\gamma x\,y\,(x\,dx - y\,dy) = 0$. Докажите, что кривая γ самопересекающаяся.

2. Найдите в окрестности точки $x = y = 0$ систему координат u, v, в которой векторные поля
$$A = (1-x)\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad B = x\frac{\partial}{\partial x} + (1+y)\frac{\partial}{\partial y}$$
принимают одновременно вид $f\dfrac{\partial}{\partial u}$ и $g\dfrac{\partial}{\partial v}$ соответственно, где f, g — некоторые гладкие функции.

3. Вычислите $\displaystyle\int\limits_{x^2+2xz+4z^2+2yz+y^2=2} \frac{dx\wedge dz}{y+z}$.

4. Найдите объем тела, заметаемого вращением вокруг оси Oz эллипса
$$x^2 + y^2 - xy \leqslant 1.$$

5. Поверхность S и плоскость H заданы уравнениями $z^3 + z - x^2 - y^2 = 0$ и $z = 1$ соответственно. Пусть $f : S \to H$ — центральная проекция из начала координат. Определим на S дифференциальную 2-форму ω и векторные поля A, B соотношениями
$$\omega = f^*(dx\wedge dy|_H), \quad i_A\omega = dz|_S, \quad i_B\omega = (x\,dy - y\,dx)|_S.$$
Вычислите образ на H векторного поля $[A, B]$ под действием f_*.

6. Пусть $f = x^2 + y^2 - 1$, и пусть $\Omega^k_f \subset \Omega^k(\mathbb{R}^2)$ — подпространство k-форм на плоскости, представимых в виде $f\,\alpha + df\wedge\beta$, где α и β — некоторые k- и $(k-1)$-формы соответственно.

   а) Докажите, что операция внешнего дифференцирования переводит Ω^k_f в Ω^{k+1}_f, и, тем самым, комплекс $0 \to \Omega^0_f \xrightarrow{d} \Omega^1_f \xrightarrow{d} \Omega^2_f \to 0$ корректно определен.

   б) Докажите, что всякая замкнутая 1-форма в этом комплексе является точной.

   в) Предъявите пример 2-формы в этом комплексе, не являющейся точной. Какова размерность факторпространства $\Omega^2_f/d\Omega^1_f$?