Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 3 марта 2002 года

Письменный экзамен

1. γ — замкнутая кривая на плоскости, лежащая внутри единичной окружности, и такая, что $\oint\limits_\gamma x\,dy - y\,dx = 15$. Докажите, что кривая γ имеет не менее двух точек самопересечения.

2. Докажите, что в окрестности точки $x = y = 0$ найдется система координат u, v, в которой векторные поля
$$A = (1+y)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad B = x\frac{\partial}{\partial x} + (1+y)\frac{\partial}{\partial y}$$
принимают одновременно вид $\dfrac{\partial}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial}{\partial v}$ соответственно. Найдите такую систему координат.

3. Вычислите $\displaystyle\int\limits_{x^2+4xz+5z^2+2y^2=2} \frac{dx\wedge dy}{2x+5z}$.

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int z^2 dx\wedge dy\wedge dz$ по полноторию, осевая окружность которого лежит в плоскости Oxy и имеет радиус R, а радиус меридиана равен r.

5. Поверхность S и плоскость H заданы уравнениями $z^3 + z^2 - x^2 - y^2 = 0$ и $z = 1$ соответственно. Пусть $f : S \to H$ — центральная проекция из начала координат. Определим на S дифференциальную 2-форму ω и векторные поля A, B соотношениями
$$\omega = f^*(dx\wedge dy|_H), \quad i_A\omega = dz|_S, \quad i_B\omega = (x\,dy - y\,dx)|_S.$$
Вычислите образ на H векторного поля $[A, B]$ под действием f_*.

6. Рассмотрим отображение f окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с угловой координатой φ на плоскость $\mathbb{R}^2$, заданное формулой
$$f(\varphi) = (\sin\varphi, \sin 2\varphi).$$
Обозначим через $\Omega^k_f \subset \Omega^k(S^1)$ подпространство форм вида $f^*\alpha$, где $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^2)$. Найдите когомологии (факторпространство замкнутых форм по точным) в комплексе $0 \to \Omega^0_f \xrightarrow{d} \Omega^1_f \to 0$.