Список задач по курсу “Конечные свободные резольвенты”.

1. а) Проверьте корректность определения локализации и задания структуры кольца/модуля на ней.

б) Докажите, что если локализация $S^{-1}R$ кольца R является конечнопорожденным (далее — КП) R-модулем, то отображение $R \to S^{-1}R$ сюръективно.

в) Докажите, что над локальным кольцом прямое слагаемое КП свободного модуля свободно.

2. а) Покажите, что в условиях утверждения о локализации Hom'ов то же верно для функторов Ext^i.

б) Покажите, что для не КП модулей M естественное отображение $S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ может быть не инъективным и не сюръективным.

3. Докажите, что если $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — простые идеалы, $I \subset R$ — идеал, $f \in R$ и $f + I \subset \bigcup_i \mathfrak{p}_i$, то $\exists i\ f + I \subset \mathfrak{p}_i$.

4. а) Пусть R нетерово, M — КП, N — R-модуль. Докажите, что

$$\operatorname{Ass}\operatorname{Hom}(M,N) = \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Ass} N.$$

б) Пусть $M/N_1, M/N_2$ — $\mathfrak{p}$-копримарны. Покажите, что тогда $M/(N_1 \cap N_2)$ — $\mathfrak{p}$-копримарен.

в) Пусть $0 = N_1 \cap \cdots \cap N_s \subset M$, M/N_i — копримарны и пересечение любого собственного подмножества N_i не равно 0. Покажите, что тогда $\operatorname{Ass} M = \bigcup \operatorname{Ass} M/N_i$.

5. а) Пусть R нетерово, M, N — КП R-модули. Докажите, что

$$\min\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(M,N) \neq 0\} = \operatorname{depth}(\operatorname{ann} M, N).$$

б) В короткой точной последовательности $0 \to M \to N \to P \to 0$ дайте оценки снизу на глубину каждого члена через глубину двух других (для фиксированного идеала I).

6. Естественным аналогом локальных колец являются градуированные кольца ($R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ — прямая сумма абелевых групп, $R_i \cdot R_j \subset R_{i+j}$, R_0 — поле) и градуированные модули над ними ($M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ — прямая сумма абелевых групп, $R_i M_j \subset M_{i+j}$). Будем рассматривать однородные гомоморфизмы (то есть $\varphi(M_i) \subset N_i$). Роль максимального идеала локального кольца выполняет идеал $R_+ := \bigoplus_{i>0} R_i$. На модулях определим операцию сдвига градуировки: $M[k]_i := M_{i+k}$. Свободным будем называть модуль, изоморфный $\bigoplus_i R[k_i]$. Для КП градуированных модулей над нётеровым градуированным кольцом сформулируйте и докажите аналоги рассказанных на лекции свойств минимальных резольвент.

7. а) Посчитайте идеалы Фиттинга $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/6$.

б) Докажите, что КП модуль над областью главных идеалов определяется своими идеалами Фиттинга однозначно с точностью до изоморфизма. Если Вы знаете, что такое дедекиндова область, то докажите, что над другими дедекиндовыми областями это неверно.

8. Пусть модуль M имеет конечное представление $R^n \xrightarrow{\varphi} R^n \to M \to 0$ с квадратной матрицей φ, и $\det\varphi$ — не делитель 0. Докажите, что

$$\operatorname{ann} M = (\operatorname{Fitt}_0(M) : \operatorname{Fitt}_1(M))$$

(частное идеалов $(I : J)$ — это по определению $\{x \in R | xJ \subset I\}$).

9. Докажите, что если комплекс КП свободных модулей над нётеровым кольцом R

$$0 \to F_s \to \dots \to F_1 \to F_0$$

точен после локализации по любому простому идеалу $\mathfrak{p}$ с $\operatorname{depth}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) < s$, то он точен.

10. Пусть R — нётерово кольцо простой характеристики p (то есть $p1 = 0$ в R), I — идеал конечной проективной размерности в R, $I^{[p^n]}$ — идеал, порождённый p^nми степенями элементов I. Докажите, что $\operatorname{pd} R/I = \operatorname{pd} R/I^{[p^n]}$.

11. а) Докажите, что $\sqrt{\operatorname{Fitt}_j(M)} = \sqrt{\operatorname{ann} \bigwedge^{j+1} M}$.

б) (Лемма Пескина-Спиро об ацикличности.) Пусть

$$0 \to L_k \to \dots \to L_1 \to L_0 \text{ —}$$

комплекс КП модулей над нётеровым локальным кольцом, $\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, L_i) \geqslant i$ и известно, что все ненулевые гомологии комплекса имеют глубину 0. Докажите, что он точен.

в) Докажите, что если в обозначениях критерия точности Буксбаума-Айзенбуда комплекс $\mathbb{F} \otimes M$ точен, то $I_{r_j+1}(\varphi_j) \subset \operatorname{ann} M$.

12. Докажите, что в нётеровом кольце выполнено условие обрыва убывающих цепочек простых идеалов.

13. а) Идеал $I_k(\varphi) \subset \Bbbk[x_{11}, \dots, x_{mn}]$ для $\varphi = (x_{ij})$ задаёт многообразие $m \times n$-матриц ранга менее k. Посчитайте геометрически его коразмерность.

б) Докажите неприводимость этого многообразия и выведите отсюда, что $\sqrt{I_k(\varphi)}$ прост.

14. Пусть F — КП свободный R-модуль. Докажите, что любой гомоморфизм $\xi : F \to R$ однозначно продолжается до внутреннего дифференцирования ι_ξ алгебры $\bigwedge F$ степени -1 (то есть

$$\iota_\xi : \bigwedge^i F \to \bigwedge^{i-1} F,\ \iota_\xi|_{\bigwedge^1 F} = \xi,\ \iota_\xi(a \wedge b) = (\iota_\xi a) \wedge b + (-1)^{\deg a} a \wedge (\iota_\xi b)$$

для однородных a, b) и что $\iota_\xi^2 = 0$.

15. Для свободных модулей F, G выберите базисы в компонентах комплекса Игона-Норкотта степени $k, 0 \leqslant k \leqslant f - g$, и выпишите в них формулы для дифференциалов.

16. а) Пусть идеал J в нётеровом кольце R порождён регулярной последовательностью $(x_1, \dots, x_r)$. Покажите, что $\operatorname{pd} R/J^m = r$ для $m \geqslant 1$. Указание: рассмотрите матрицу с m строками

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r & 0 & \\ 0 & x_1 & \dots & x_{r-1} & x_r & \dots \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & x_1 & \dots & x_r \end{pmatrix}.$$

б) Покажите, что (в обозначениях комплекса E–N) из того, что $\operatorname{depth} I_g(\varphi) = f - g + 1$ не следует, что $\operatorname{depth} I_{g-1}(\varphi) \geqslant f - g + 2$.

17. Покажите, что ТП $F \to G \to M \to 0$ даёт ТП

$$F \otimes S(G) \to S(G) \to S(M) \to 0.$$

18. Пусть M — КП модуль над нётеровым локальным R, и $\operatorname{pd} M = \operatorname{depth}(\operatorname{ann} M, R)$. Покажите, что в минимальной резольвенте M (в обозначениях критерия точности) все $I_{r_j}(\varphi_j)$ имеют общий радикал с $\operatorname{ann} M$.

19. а) Пусть M — КП модуль над нётеровым R, $I = (x_1, \dots, x_n)$ — идеал, $F = R^n$, $\xi : F \to R, e_i \mapsto x_i$. Покажите, что

$$\operatorname{depth}(I, M) = n - \max\{i | H_i(\left(\bigwedge F, \iota_\xi\right) \otimes M) \neq 0\}.$$

б) Для бесконечнопорождённых M эта формула задаёт правильное определение глубины. Покажите, что правая часть не зависит от выбора порождающих идеала.

20. Покажите, что при $g \geqslant 2$ комплекс Игона-Норкотта $\mathcal{C}_i, i \leqslant -2$, точен кроме самого правого члена $\iff I_g(\varphi) = R$.

21. Пусть мы рассматриваем гомоморфизм $\varphi : F \to G$ КП свободных модулей рангов f, g соответственно над нётеровым R и $\operatorname{depth} I_g(\varphi) = f - g + 1$. Опишите (в терминах морфизма φ^*) модуль, резольвентой которого будет $\mathcal{C}_{-1}$, и покажите, что $I_g(\varphi)$ содержится в его аннуляторе.

22. а) Докажите, что если M — КП градуированный S-модуль, N — градуированный S-модуль, то $\operatorname{Homgr}(M, N)$ совпадает с множеством гомоморфизмов из M в N как S-модулей без учёта градуировки.

б) Найдите регулярность поля вычетов $\Bbbk = S/S_+$.

в) Докажите, что $\operatorname{reg} N = \max\{n | N_n \neq 0\}$ для модуля конечной длины.

23. Про градуированный модуль говорят, что он *обладает линейной резольвентой,* если для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ $b_{ij} = 0$ при $j \neq i + n$.

а) Докажите, что модуль конечной длины обладает линейной резольвентой $\iff$ он изоморфен $\Bbbk[-n]^m$.

б) Докажите, что идеал в S, фактор по которому имеет конечную длину, обладает линейной резольвентой $\iff$ он является степенью максимального идеала.

в) Докажите, что $\operatorname{reg} M \leqslant m \iff \bigoplus_{n \geqslant m} M_n$ обладает линейной резольвентой.

24. Докажите, что $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n))$.

25. (Формула Ауслендера-Буксбаума.) Докажите (пользуясь теоремой Гильберта о сизигиях), что для КП градуированного S-модуля M

$$\operatorname{pd} M + \operatorname{depth}(S_+, M) = r + 1.$$

26. а) Докажите, что на $\mathbb{P}^r$ есть точная последовательность векторных расслоений (или локально свободных пучков)

$$0 \to \Omega^1 \to \Gamma(\mathcal{O}(1)) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0.$$

б) Проверьте корректность определения u и точность резольвенты Бейлинсона в карте $\{x_0 y_1 \neq 0\}$.

27. а) Докажите, что на связной гладкой проективной кривой X для эффективного дивизора D $h^0(D) \leqslant \deg D + 1$ и равенство достигается только при $D = 0$ или $X = \mathbb{P}^1$.

б) Докажите, что если X — приведенная неприводимая невырожденная кривая степени d в $\mathbb{P}^r$, то $d \geqslant r$, и равенство достигается только для рациональной норм-кривой.

28. При помощи книги Хартсхорна "Алгебраическая геометрия" (особенно гл. 3 §8) докажите утверждение из лекции про прямые образы пучков на прямом произведении: пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, $\mathcal{G}$ — на Y, pr_i — проекции $X \times Y$ на сомножители, тогда

$$R^i \mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{pr}_1^* \mathcal{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{G}) = \mathcal{F} \otimes_{\Bbbk} H^i(Y, \mathcal{G}).$$

29. а) Опишите минимальную резольвенту идеала рациональной норм-кривой. Указание: её идеал порождается 2×2-минорами некоторой матрицы.

б) Покажите, что идеал (x_0, x_1) в однородном коорд. кольце кривой, задающий подсхему длины $r-1$ на кривой, изоморфен коядру этой матрицы. Опишите минимальную резольвенту идеала $r-1$ точки на норм-кривой.

30. Докажите. что существует $n = n(d, r)$ такое, что для любых (различных) n точек на привед. непривод. невырожд. кривой степени d в $\mathbb{P}^r$ ненулевые числа Бетти идеала кривой совпадают с соответствующими числами Бетти идеала набора точек (но где у кривой нули, там у точек могут быть не нули).

31. а) Докажите, что идеал со свободной резольвентой длины 0 — это главный идеал, порождённый не делителем 0.

б) Докажите, что горенштейнов идеал проективной размерности 1 (в локальном или градуированном кольце) порождён регулярной последовательностью (может пригодиться задача 3 или сведения из с/к Е. С. Голода).

в) Каковы степени элементов этой последовательности для канонической кривой рода 4?

32. Докажите, что построенное умножение на минимальной резольвенте факторкольца по горенштейнову идеалу проективной размерности 2 ассоциативно. Указание: если один из множителей лежит в $F_0 = R$, то это очевидно.

33. Докажите, что для кососимметрической матрицы $\sqrt{I_{2m-1}(\varphi)} = \sqrt{I_{2m}(\varphi)}$.

34. (Комплекс Гюлликсена-Негарда (Gulliksen, Negård).) Пусть F, G — два свободных R-модуля ранга n, $\varphi : F \to G$ — гомоморфизм. Рассмотрим комплекс

$$0 \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^n G, \bigwedge^n F) \xrightarrow{d_4} \mathrm{Hom}(G, F) \xrightarrow{a \mapsto (a\varphi, \varphi a)} M \xrightarrow{(a,b) \mapsto \varphi a - b\varphi} \mathrm{Hom}(F, G)$$

$$\xrightarrow{\wedge \bigwedge^{n-1} \varphi} \mathrm{Hom}(\bigwedge^n F, \bigwedge^n G) \to 0,$$

где d_4 — свёртка с $\bigwedge^{n-1} \varphi$ ($\mathrm{Hom}(A, B) = A^* \otimes B$ для свободных модулей, так что ясно, как сворачивать и аналогично внешне умножать в последнем дифференциале), M — гомологии комплекса $R \xrightarrow{a \mapsto (a1, a1)} \mathrm{End}(F) \oplus \mathrm{End}(G) \xrightarrow{(a,b) \mapsto \mathrm{tr}\, a - \mathrm{tr}\, b} R$ в среднем члене (это свободный модуль!).

Докажите, что если R нётерово и глубина идеала $I_{n-1}(\varphi)$ субмаксимальных миноров φ больше либо равна 4, то этот комплекс является свободной резольвентой факторкольца по этому идеалу.

35. а) Аналогично предыдущей задаче постройте резольвенту длины 3 для факторкольца по идеалу субмаксимальных миноров симметрической матрицы, точную, если этот идеал имеет глубину $\geqslant 3$.

б) Посчитайте с её помощью (градуированные) числа Бетти одн. коорд. кольца $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$.

36. Докажите, что число различных порядков на мономах в $S = \Bbbk[x_0, \ldots, x_r]$ при $r \geqslant 1$ есть континуум.

37. а) Строго докажите, что процесс редукции любого элемента с помощью любого набора элементов обрывается за конечное число шагов.

б) (Правило треугольника.) Пусть $u_1, \ldots, u_g$ — элементы свободного модуля, S_{ij} и S_{jk} редуцируются к 0 и $\text{НОК}(\bar{u}_i, \bar{u}_k)$ делится на $\bar{u}_j$. Докажите, что S_{ik} тоже редуцируется к 0.

38. Пусть $X = (x_{ij})$ — 2×2-матрица из независимых переменных, I — идеал, порождённый элементами её квадрата. Так как у нильпотентной матрицы след и определитель равны 0, то по теореме Гильберта о нулях некоторые степени $\det X$ и $\operatorname{tr} X$ лежат в I. Определите при помощи базисов Грёбнера минимальные такие степени.

39. Пусть $x > y > z$ и мы берём порядок degrevlex. Найдите базис Грёбнера идеала $(x^2, y^2, xy + yz) \subset \Bbbk[x, y, z]$.

40. Постройте минимальную свободную резольвенту идеала

$$(x_0^2 - x_2x_3, x_0x_1 - x_3^2, x_0x_2 - x_1^2, x_1x_3 - x_2^2, x_0x_3 - x_1x_2) \subset \Bbbk[x_0, \dots, x_3],$$

то есть идеала 5 точек в $\mathbb{P}^3$.

41. Докажите, что следующие свойства переносятся с ассоциированной дискретной алгебры Ходжа на исходную:

а) отсутствие нильпотентов;

б) наличие в идеале (Σ) регулярной последовательности длины r;

в) $\cap_n(\Sigma)^n = 0$ (в дискретном случае это всегда так).

42. а) Покажите, что если B-базис идеала J в алгебре Ходжа A составляют содержащиеся в нём стандартные мономы, то на A/J индуцируется структура алгебры Ходжа с тем же Σ и с идеалом $I + J$.

б) Покажите, что идеал, порождённый степенью минимальной переменной недискретной части, удовлетворяет условиям предыд. пункта.

в) Пусть $T \subset \Sigma$ — идеал в ч.у.м. переменных. Докажите, что $A/(T)$ обладает структурой алгебры Ходжа относительно ч.у.м. $\Sigma \setminus T$ и идеала $I \cap B[\Sigma \setminus T]$.

43. (Пример Трунга.) Пусть $A = \Bbbk[X, Y, Z, U, V, T]/(XZ - UZ, YZ - VZ, XYZ, UV - XYT)$, порядок на переменных: $X \geqslant Y \geqslant U \geqslant T$, $Z \geqslant V \geqslant T$, $Y \geqslant V$, $Z \geqslant U$, остальные пары несравнимы. Докажите, что A является порядковой алгеброй Ходжа относительно этих переменных и что её выпрямляющие соотношения не порождают ядро гомоморфизма $\Bbbk[\Sigma] \to A$.

44. Пусть $\alpha = [a]$, $\Psi = \{[d] | a_i \notin [d]$ для не более одного $i\}$, а B целостно и целозамкнуто (или просто поле). Покажите индукцией по числу таких i, что $G(U_\alpha)[\alpha^{-1}] = B[\Psi, \alpha^{-1}]$ и элементы Ψ — независимые переменные, в частности, $G(U_\alpha)[\alpha^{-1}]$ целостно и целозамкнуто. Пользуясь тем, что $G(U_\alpha)/(\alpha)$ является порядковой алгеброй Ходжа, в частности не имеет нильпотентов, покажите, что и $G(U_\alpha)$ целозамкнуто, а значит, и $B[X]/I_{r+1}(\varphi)$ целозамкнуто.

45. Покажите, что гладкие точки многообразия матриц ранга $\leqslant r$ — это в точности матрицы ранга r.