2001 год, осенний семестр
Математический анализ, 1 курс
Листок 1

1. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a^n$ равен ∞ при $a > 1$ и нулю при $|a| < 1$.
Указание. Для начала докажите, что $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ при $h > -1$.

2. Докажите, что $\lim_{x\to+\infty}(x^k/a^x) = 0$ при $a > 1$.

3. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(a^n/n!) = 0$.

4. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(n!/n^n) = 0$.

5. Найдите $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

6*. Существует ли предел $\lim_{n\to\infty} \sin n$?

7. Пусть $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ для всех $n > 0$. Покажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдите ее предел.

8. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, для последовательности, заданной условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$.

9. Положим $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Покажите, что $a_n < a_{n+1} < 3$ для всех n.

Из последней задачи вытекает, что существует предел $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Это предел называется *числом e.*

10. Найдите предел $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{(n+1)^2}$.

11. Найдите пределы: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$.

12. Докажите, что $(1+x)^y \geqslant 1 + xy$, как только $x > -1$ и $y > 1$.
Указание. Для начала докажите это для рациональных x.

13. Докажите, что функция $y = (1 + 1/x)^x$ возрастает на $(1; +\infty)$ (не пользуйтесь производной!).

14. Докажите, что $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, а также что $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$.
Указание. Эту задачу можно решить независимо от предыдущей.

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (*)$$

называется *рядом.* Говорят, что ряд $(*)$ *сходится,* если существует (конечный) предел

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Если ряд сходится, то это предел называется его *суммой;* если ряд не сходится, говорят, что он *расходится.* Выражения вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называются *частичными суммами* ряда.

15. Докажите, что ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

расходится.

16. Докажите, что ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

также расходится.

17. Докажите, что

$$e^a=1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}+\ldots.$$

18. Докажите, что ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

сходится.

19. Докажите, что ряд

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$$

сходится при всех $s>1$.

Указание. Сравните частичные суммы этого ряда с интегралами от фунции $y=1/x^s$.

Сумма этого ряда обозначается $\zeta(s)$ и называется *дзета-функцией Римана.*

20*. Докажите, что $\lim_{s\to 1}\zeta(s)=\infty$.

21. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел в порядке возрастания. Докажите *формулу Эйлера*

$$\zeta(s)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_i^s}}$$

(уточните смысл правой части).

22*. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел в порядке возрастания. Докажите, что ряд

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}+\ldots$$

расходится.

Указание. В принципе эту задачу можно решить и сейчас, но через пару месяцев в вашем распоряжении будут средства, позволяющие сделать это с меньшими трудностями.