2001 год, осенний семестр
Математический анализ, 1 курс
Листок 3

1. Найдите $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^{2m}(2\pi n!\cdot x)$ и $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2m}(2\pi n!\cdot x)$ для различных x.

2. При каких (комплексных) z сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}$$

(k — натуральное, фиксированное).

3. Напомним (см. листок 1), что *дзета-функция Римана* определяется, при $s>1$, формулой

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots.$$

Докажите, что $\zeta(s)$ непрерывна как функция от s.

4. Докажите «сходимость интеграла» $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ (то есть существование предела $\lim_{A\to\infty}\int_0^A \dfrac{\sin x}{x}\,dx$). (Указание: воспользуйтесь интегрированием по частям.)

5. Дискретный аналог предыдущей задачи: докажите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

6. Докажите сходимость интеграла $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

7. Пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ сходится; докажите, что любая перестановка ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ сходится к тому же числу, что и сам ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

8. Пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$ сходится; докажите, что члены ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ можно переставить таким образом, чтобы его суммой было любое наперед заданное действительное число.

9. Придумайте пример (а) произвольной, (б) монотонной функции, непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных точках.

10. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a;b]$. Докажите, что $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$.

11. Найдите асимптотику $\zeta(s)$ при $s \to 1$.

12*. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность простых чисел, расположенных в порядке возрастания. Найдите асимптотику суммы

$$\frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_2^s} + \ldots + \frac{1}{p_n^s} + \ldots$$

при $s \to 1$.