2001 год, осенний семестр
Математический анализ, 1 курс
Листок 4

1. Приведите пример такой функции $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, что

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

(все пределы, возникающие по ходу дела, должны существовать).

2. Приведите пример такой *непрерывной* функции $f\colon (0,1)^2 \to \mathbb{R}$, что $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ и $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ существуют и различны.

3. а) Докажите, что ряд

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\Bigr)$$

сходится при любом $x \notin \mathbb{Z}$.

б) Пусть $f(x)$ — его сумма. Докажите, что $f(x+1) = f(x)$.

в) Докажите, что $f(x)$ непрерывна.

г) Найдите асимптотику $f(x)$ при $x \to N \in \mathbb{Z}$.

На самом деле выражение для функции $f(x)$ можно выписать в явном виде; в одном из следующих листков мы этим займемся.

4. Пусть $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $N > 2$ — целое число, и $A_n(z) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n} 1/(z + k + l\omega)^N$. Покажите, что существует предел $A(z) = \lim_{n\to\infty} A_n(z)$ (предполагается, что $z \in \mathbb{C}$ таково, что все слагаемые определены). При каких N верны тождества $A(z+1) = A(z+\omega) = A(z)$?

5. Покажите, что при $N = 2$ последовательность A_n из предыдущей задачи расходится.

6. В условиях предыдущей задачи пусть

$$A_n(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n\\ -n\leqslant l\leqslant n}}{}' \Bigl(\frac{1}{(z+k+l\omega)^2} - \frac{1}{(k+l\omega)^2}\Bigr)$$

(штрих при знаке суммы означает, что пара $(k,l) = (0,0)$ при суммировании опускается).

а) Покажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} A_n(z)$ (этот предел обозначается $\wp(z)$ и называется *$\wp$-функцией Вейерштрасса*).

б) Докажите тождество $\wp(z+1) = \wp(z+\omega) = \wp(z)$.

Гамма-функция Эйлера определяется для всех $s > 0$ (если вы знаете соответствующие определения, то и для всех комплексных s, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}(s) > 0$) формулой

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x} \frac{dx}{x}. \qquad (1)$$

Точный смысл этой формулы таков:

$$\Gamma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^A x^s e^{-x} \frac{dx}{x} + \lim_{M \to \infty} \int_A^M x^s e^{-x} \frac{dx}{x}, \qquad (2)$$

где $A > 0$ (очевидно, что от выбора A ничего не зависит).

7. Докажите существование пределов в формуле (2).

8. Докажите, что функция Γ дифференцируема и что при $\mathrm{Re}(s) > 1$ формулу для ее производной можно получить дифференцированием под знаком интеграла в формуле (1)

9. Докажите, что $\Gamma(n) = (n-1)!$ при натуральных n.

10. Докажите тождество: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

11. а) Вычислите $U(a,b) = \int_0^\infty e^{-bx} \cos ax \, dx$ при $b > 0$.

б) Докажите, что $I(a,b) = \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin ax}{x} \, dx$ сходится при $a > 0$, причем равномерно по b при $b \in [0,1]$.

в) Докажите, что $I(a,0)$ при $a > 0$ от a не зависит.

г) Докажите, что $\frac{d}{da} I(a,b) = U(a,b)$.

д) Вычислите $I(1,0)$.