2001 год, осенний семестр.
Математический анализ, 1 курс.
Листок 4а (дополнительный)

Прорешав этот листок, вы познакомитесь с таким важным математическим понятием, как p-адические числа.

Пусть p-простое число. *Целым p-адическим числом* называется бесконечная влево последовательность из p-ичных цифр (то есть чисел от 0 до $p-1$). Множество целых p-адических чисел обозначается $\mathbb{Z}_p$. Целые p-адические числа можно складывать и умножать по обычным правилам сложения и умножения «столбиком» в p-ичной системе счисления.

1. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Покажите, что существует и единственно такое число $c \in \mathbb{Z}_p$, что $b + c = a$ (это число называется, естественно, разностью p-адических чисел a и b и обозначается $a - b$).

Поскольку всякое натуральное число можно записать в p-ичной системе счисления и приписать слева бесконечное количество нулей, всякое натуральное число можно рассматривать как целое p-адическое; в силу задачи 1 всякое целое число (разность двух натуральных) также можно рассматривать как целое p-адическое. Стало быть, $\mathbb{Z}$ вкладывается в $\mathbb{Z}_p$. При таком вложении $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_p$ сложение и умножение в $\mathbb{Z}$ соответствует, очевидно, сложению и умножению в $\mathbb{Z}_p$.

2. Решите уравнение $3x = 1$ в $\mathbb{Z}_7$.

3. Докажите, что сложение, умножение и вычитание в $\mathbb{Z}_p$ удовлетворяют обычным тождествам (переместительный, сочетательный, распределительный законы). Иными словами, $\mathbb{Z}_p$ является кольцом.
Указание. Если вам трудно сделать эту задачу прямо сейчас, вернитесь к ней после задачи 7.

Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$. Обозначим через $\nu_p(a)$ длину «хвоста» из нулей в конце записи числа a (очевидно, $p^{\nu_p(a)}$ — максимальная степень числа p, на которую делится a; полагаем также $\nu_p(0) = \infty$); обозначим также $\|a\|_p = p^{-\nu_p(a)}$.

4. Докажите неравенство $\|a + b\|_p \leqslant \max(\|a\|_p, \|b\|_p)$.

Для $a \in \mathbb{Z}_p$, $r \in \mathbb{R}$ положим $U_r(a) = \{\, x \in \mathbb{Z}_p \mid \|x - a\|_p < r \,\}$. Введем на $\mathbb{Z}_p$ топологию, для которой всевозможные $U_r(a)$ образуют базис открытых множеств.

Неформально говоря, в этой топологии число тем «меньше» (ближе к нулю), чем на бо́льшую степень p оно делится.

5. Покажите, что относительно этой топологии $\mathbb{Z}_p$ хаусдорфово и компактно.

6. Покажите, что отображения из $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}_p$, заданные сложением и умножением, являются непрерывными.

7. Покажите, что $\mathbb{Z}$ плотно в $\mathbb{Z}_p$ (то есть $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$).

8. Покажите, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ в $\mathbb{Z}_p$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. Докажите, что всякое целое число, не делящееся на p, имеет обратное в $\mathbb{Z}_p$.

10. Сколько решений в $\mathbb{Z}_7$ имеют уравнения $x^2 = 2$ и $x^2 = 3$?

11. Пусть a — целое число. Определим последовательность $\{x_n\}$ по правилам $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^p$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в $\mathbb{Z}_p$. (Предел этой последовательности называется *представителем Тейхмюллера* числа a.)

12. Пусть a и b — целые числа, $a \equiv b \pmod{p}$. Докажите, что представители Тейхмюллера чисел a и b совпадают.

13. Пусть f — многочлен от одной переменной с коэффициентами из Z_p. Пусть число $a \in \mathbb{Z}_p$ таково, что $f(a)$ делится на p, а $f'(a)$ не делится на p. Покажите, что в $\mathbb{Z}_p$ существует корень многочлена f, сравнимый с a по модулю p; покажите также, что корень с таким свойством единственен. *Указание.* Ищите это корень в виде ряда $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$.

14. Обобщите результат предыдущей задачи на случай, когда $f'(a)$ делится на на p (что тогда надо потребовать от $f(a)$? Как будет связан корень многочлена с числом a)?

15. Покажите, что $\mathbb{Z}_2$ гомеоморфно канторову множеству.

16*. Покажите, что любое $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно канторову множеству. (Заметим в скобках, что *как кольца* различные $\mathbb{Z}_p$ неизоморфны даже без учета топологии.)