2001 год, осенний семестр
Математический анализ, 1 курс
Листок 5

1. Пусть числа $a_0, \ldots, a_{n-1}$ таковы, что уравнение $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. а) Докажите, что функция $y(t) = e^{\lambda t}$ является решением дифференциального уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_i$ для некоторого i. б) Докажите, что произвольное решение этого дифференциального уравнения имеет вид $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$, где $c_i = \mathrm{const}$.

2. Пусть числа $a_0, \ldots, a_{n-1}$ таковы, что уравнение $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно. Докажите, что произвольное решение дифференциального уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ имеет вид $y(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i - 1} c_{ij} t^j e^{\lambda_i t}$, где $c_{ij} = \mathrm{const}$.

Координаты $x(t), y(t)$ материальной точки единичной массы, движущейся по плоскости, удовлетворяют дифференциальным уравнениям $x''(t) = F_x(t, x, y, x', y'), y''(t) = F_y(t, x, y, x', y')$, где F_x, F_y — координаты вектора внешних сил, действующих на точку.

3. Пусть точка движется по плоскости под действием силы тяжести: $F_x = 0$, $F_y = -g = \mathrm{const}$. В начальный момент точка расположена в начале координат: $x(0) = y(0) = 0$. Начальная скорость $(x'(0), y'(0))$ равна по модулю v и направлена под углом φ к горизонту (к оси абсцисс). а) Выпишите функции $x(t), y(t)$. б) Найдите время T падения точки на землю, т.е. наименьшее $T > 0$ такое, что $y(T) = 0$. в) При каком угле φ дальность полета (т.е. значение $x(T)$) будет наибольшим (при фиксированном v)?

4. Пусть точка движется по плоскости под действием силы тяжести и силы вязкого сопротивления воздуха: $F_x = -\alpha x'$, $F_y = -g - \alpha y'$ (α — коэффициент вязкого трения. а) Ответьте на вопросы а) и б) задачи 3; б) Найдите первый член асимптотики времени и дальности полета при фиксированных v и φ и коэффициенте трения $\alpha \to 0$. в) Найдите с точностью до $o(\alpha)$ угол φ, дающий максимальную дальность полета.