2001 год, осенний семестр
Математический анализ, 1 курс
Листок 6

1. Докажите, что существует бесконечно дифференцируемая на всей числовой прямой функция $y = f(x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

(одно из «уравнений Бесселя»), $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и найдите ее разложение в степенной ряд.
Указание. С нахождения ряда и начните.

2. Функция $y = f(x)$ имеет при $x \to 0$ разложение Тейлора

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

Пусть $x = g(y)$ — обратная к ней функция. Найдите ее разложение Тейлора при $y \to 0$ с точностью до $o(y^4)$.

3. Найдите

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$

Указание. При решении этой задачи можно не иметь ни малейшего представления о том, как разлагаются в ряд участвующие в ней функции.

4. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\ddot{x} = -\sin x$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ («уравнение физического маятника»). Найдите разложение Тейлора функции $x(t)$ при $t \to 0$ с точностью до $o(t^8)$ и сравните результат с решением уравнения $\ddot{x} = -x$ («уравнение математического маятника») с теми же начальными условиями.
Указание. Вам будет легче, если вы предварительно докажете, что членов с t в четной степени в разложении не будет (но можно, конечно, честно вычислять разложение, не зная об этом обстоятельстве).

5. Найти радиус сходимости ряда Тейлора в нуле для функции $y = 1/\sqrt{(1-x)(1-2x)}$.

6. Для всех $z \in \mathbb{C}$ определим экспоненту по формуле

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

а) Докажите, что этот ряд сходится при всех z к функции, непрерывной на всем $\mathbb{C}$, и что выполнено тождество $e^{z+w} = e^z e^w$.

б) Докажите, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{z+h}-e^z}{h}=e^z$$

(z и h — произвольные комплексные числа).

7. а) Пусть $a>0$. Докажите, что последовательность, заданная формулами $x_1=1$, $x_{n+1}=(x_n+(a/x_n))/2$, сходится к $\sqrt{a}$.

б) Сколько членов этой последовательности надо взять, чтобы вычислить $\sqrt{3/2}$ с точностью до одной сотой?

в) Сколько членов ряда для $\sqrt{1+x}$ надо взять, чтобы вычислить $\sqrt{3/2}$ с точностью до одной сотой?