Независимый московский университет
Осенний семестр 2001 года
Математический анализ, 1 курс
Письменный экзамен 9 декабря 2001 г.

На выполнение работы дается 4 часа

1. $F(a)$ — полусумма двух положительных корней уравнения

$$x^5 - ax + 1 = 0$$

(мы считаем, что a достаточно велико). Найти асимптотику $F(a)$ при $a \to +\infty$.

2. Найти экспоненту матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. На плоскости изображены график функции $y = (e^x + e^{-x})/2$ («цепная линия») и окружность с центром в точке $(0, a)$ и радиусом $(a-1)$. При каких значениях $a > 1$ окружность и цепная линия имеют более одной точки пересечения?

4. $S(a)$ — площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = e^x$ и прямой с уравнением $y = x + 1 + a$. Найти асимптотику $S(a)$ при $a \to 0$.

5. Функция $y = f(x)$ представляется в окрестности нуля в виде суммы равномерно сходящегося степенного ряда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, причем $a_1 \neq 0$. Доказать, что обратная к ней функция $x = g(y)$ представляется в окрестности нуля в виде суммы сходящегося степенного ряда $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$.