ЭКЗАМЕН (17 ФЕВРАЛЯ 2002)

Задача 1. Пусть u_n — число решений уравнения $x+2y+3z+4t=n$ в целых неотрицательных числах. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$. (Радиус сходимости — это максимум таких чисел R, что ряд сходится при $|z|<R$.)

Задача 2. Функция $y=f_a(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=y^2 \operatorname{arctg} y$ и начальному условию $f_a(0)=a>0$. а) Докажите, что при некотором $T_a>0$ происходит "взрыв": $\lim_{t\to T_a-0} f_a(t)=\infty$. б) Найдите асимптотику числа T_a при $a\to+\infty$.

Задача 3. Сколько нулей имеет на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)=\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)$?

Задача 4. Найдите асимптотику при $n\to\infty$ последовательности $a_n=\int_0^1 \sin^n x\,dx$.

Задача 5. Элементами топологического пространства X являются ограниченные последовательности вещественных чисел. Топология определяется метрикой $\varrho(f,g)=\sup_n |f_n-g_n|$. а) Докажите, что шар радиуса 1 с центром в нуле в этом пространстве некомпактен. б) Докажите, что множество $\Pi=\{f\in X \mid \forall n\ |f_n|\le 1/n\}$ компактно.