ЛЕКЦИЯ 1

Abstract. Топологические пространства — определения и примеры. Непрерывность и предел.

Топологией на множестве X называется такое семейство $\mathfrak{A}$ его подмножеств (называемых *открытыми*; а само X называется *топологическим пространством*), что

1. $\varnothing \in \mathfrak{A}$, $X \in \mathfrak{A}$.
2. Если $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ — произвольное семейство открытых множеств, то множество $\bigcup_{U \in \mathfrak{B}} U$ открыто (принадлежит $\mathfrak{A}$). Коротко: объединение любого семейства открытых множеств открыто.
3. Если $U_1, U_2 \in \mathfrak{A}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{A}$. Коротко: пересечение двух (и, следовательно, любого конечного семейства) открытых множеств открыто.

Семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств множества X называется *базой окрестностей*, если

1. $\bigcup_{U \in \mathfrak{B}} U = X$;
2. Если $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ и $x \in U_1 \cap U_2$, то найдется множество $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{B}$ — система окрестностей в множестве X. Обозначим $\mathfrak{A}$ множество всех подмножеств U множества X таких, что $\forall x \in X\, \exists V \in \mathfrak{B} : x \in V \subset U$. Тогда система подмножеств $\mathfrak{A}$ является топологией.*

Доказательство — упражнение.

Множество $M \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus M$ открыто. Очевидно, пересечение любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто. Замкнутое множество $\overline{U} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{U \subset M, M \text{ замкнуто}} M$ называется замыканием множества U; очевидно, U замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{U} = U$.

Примеры топологических пространств, наиболее употребительных в анализе:

Пример 1. Дискретное пространство: множество X — произвольное (чаще всего конечное или счетное), открытыми являются *все* его подмножества.

Пример 2. Пространство $\overline{\mathbb{N}}$: множество A состоит из всех натуральных чисел и еще одного элемента ∞. Базу окрестностей составляют все одноточечные множества $\{n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, и множества $[a, \infty] \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\} \cup \{\infty\}$.

Пример 3. Пространство действительных чисел $\mathbb{R}$: определение множества действительных чисел будет дано позднее; базу окрестностей составляют интервалы $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, для всех $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Пример 4. Пополненное пространство действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$: $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; базу окрестностей составляют открытые подмножества в $\mathbb{R}$ и множества вида $(a, +\infty] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \cup \{+\infty\}$ и $[-\infty, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \cup \{-\infty\}$.

Пример 5. Другое пополнение пространства действительных чисел — "с бесконечностью без знака": $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, базис окрестностей составляют открытые подмножества в $\mathbb{R}$ и множества вида $U_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} \cup \{\infty\}$.

Пример 6. Декартовы произведения. Это общая конструкция: если X и Y — топологические пространства, то за базу топологии в $X \times Y$ примем совокупность всех декартовых произведений открытых подмножеств в X и Y. Это действительно база топологии: если $x \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$, то x принадлежит множеству $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$. Особенно часто в анализе используют декартовы степени $\mathbb{R}^n$.

Пример 7. Пополненное пространство разбиений отрезка $[0, 1]$: элементами являются все конечные возрастающие последовательности $\{x_1 < x_2 < \ldots < x_N\} \subset [0, 1]$, и один дополнительный элемент ∞ ("идеальное бесконечно мелкое разбиение"). Мелкостью разбиения называют величину $\mu = \max(x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_N - x_{N-1})$. Базу окрестностей составляют все одноточечные множества, кроме $\{\infty\}$, а также все множества U_ϵ, состоящие из ∞ и разбиений с мелкостью, меньшей ϵ.

Пример 8. Пространство $C[0, 1]$: элементами являются непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$, а базу окрестностей составляют всевозможные *шары* (лучше бы, впрочем, называть их "кубами"): шар радиуса r с центром $x \in C[0, 1]$ это множество $B_r(x) = \{y \in C[0, 1] \mid \forall t \in [0, 1]\, |y(t) - x(t)| < \epsilon\}$.

Пример 9. Подмножества. Это общая конструкция: если X — топологическое пространство, и $Y \subset X$, то можно определить в Y топологию, где открытыми множествами считаются пересечения Y с открытыми подмножествами пространства X.

Отображение $f : X \to Y$ двух топологических пространств называется *непрерывным*, если для каждого открытого подмножества $U \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ является открытым подмножеством множества X. Отображение $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если оно обратимо, и оба отображения — f и f^{-1} — непрерывны.

Нетрудно видеть, что если $f : X \to Y$ — гомеоморфизм, то множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда открыто $f(U) \subset Y$. Таким образом, гомеоморфизм осуществляет взаимно однозначное отображение топологий пространств X и Y, и гомеоморфные пространства топологически неразличимы.

Примеры:

Пример 10. Пространство $\overline{\mathbb{N}}$ гомеоморфно подмножеству $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \subset \mathbb{R}$. Гомеоморфизм очевиден: $f(n) \stackrel{\text{def}}{=} 1/n$, $f(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ (проверьте, что это действительно гомеоморфизм).

Пример 11. Пространство $\overline{\mathbb{R}}$ гомеоморфно отрезку $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$: положим, например, $f(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x)$, если $x \in \mathbb{R}$ и, по определению, $f(\pm\infty) = \pm 1$. Пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$ гомеоморфно окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$: положим $f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, если $t \in \mathbb{R}$, и, по определению, $f(\infty) = (0, -1)$.

Пример 12. Непрерывные отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (непрерывные функции действительного переменного). Для непрерывности достаточно, чтобы прообраз произвольной базисной окрестности, т.е. интервала $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, был открыт. Иными словами, для всякой точки $b \in f^{-1}((a - \epsilon, a + \epsilon))$ должен существовать интервал, ее содержащий и лежащий целиком в $f^{-1}((a - \epsilon, a + \epsilon))$. Без ограничения общности можно предположить, что точка b — центр этого интервала, и что $a = f(b)$. Иными словами, получаем такое определение: функция f непрерывна, если для всякого интервала $(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$ и всякой точки существует такое $\delta > 0$, что $(b - \delta, b + \delta) \subset f^{-1}((f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon))$. Иначе говоря, $\forall b \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(b)| < \epsilon$, для всех x таких, что $|x - b| < \delta$. Это обычное определение непрерывности.

Говорят, что отображение $f : X \to Y$ *непрерывно в точке* $b \in X$, если для каждой окрестности U точки $f(x) \in Y$ (т.е. открытого подмножества в Y, содержащего точку $f(x)$) ее полный прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ содержит некоторую окрестность точки b.

Лемма. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно во всех своих точках.*

Доказательство. Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то полный прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ открыт и содержит точку b, являясь, таким образом, искомой окрестностью. Пусть, напротив, отображение $f : X \to Y$ непрерывно во всех точках $b \in X$, и $U \subset Y$ открыто. Тогда для каждого $a \in f^{-1}(U)$ существует открытое множество R_a такое, что $a \in R_a \subset f^{-1}(U)$. Отсюда немедленно следует, что $\bigcup_{a \in f^{-1}(U)} R_a = f^{-1}(U)$ и, следовательно, множество $f^{-1}(U)$ открыто как объединение открытых множеств. □

Элемент $a \in Y$ называется *пределом* отображения $f : X \to Y$ в точке b ("при аргументе, стремящемся к b"), если отображение $\tilde{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \neq b \\ a, & x = b \end{cases}$ непрерывно в точке b. Заметим, что предел зависит только от поведения отображения f в произвольной окрестности точки b, и не зависит от значения $f(b)$ — отображение f может быть даже не определено в точке b.

Пример 13. Пусть $f : \overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$; найдем условие того, что $a \in \mathbb{R}$ — предел f в точке ∞. Поскольку от значения $f(\infty)$ предел не зависит, на самом деле мы ищем значение предела функции, определенной на множестве $\mathbb{N}$, т.е. последовательности $f(n)$. По определению, прообраз произвольного интервала $\tilde{f}^{-1}((a - \epsilon, a + \epsilon))$ должен содержать какую-либо базовую окрестность точки ∞, т.е. множество $[N, \infty]$. Иными словами, $a = \lim_{n\to\infty} f(n)$, если $\forall \epsilon > 0\, \exists N \forall n \geq N : |f(n) - a| < \epsilon$ — это хорошо известное определение предела последовательности.

Пример 14. Аналогичным образом получается

- Определение предела функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке b ("при $t \to b$"): $a = \lim_{t\to b} f(t)$, если $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t\, |t - b| < \delta \Rightarrow |f(t) - a| < \epsilon$.
- Определение предела функции $f : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ в точке $+\infty$ (соответственно, $-\infty$): $a = \lim_{t\to+\infty} f(t)$, если $\forall \epsilon > 0\, \exists M\, \forall t\, t > M$ (соответственно, $t < M$; в случае функции $f : \widetilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ и точки ∞ нужно $|t| > M$) $\Rightarrow |f(t) - a| < \epsilon$. Заметим, что значение предела зависит только от ограничения функции f на множество $\mathbb{R}$ — значения $f(\pm\infty)$ не важны.

Пример 15. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Определим функцию I_f на пространстве разбиений формулой $I_f(x_1,\dots,x_N) = f(x_2)(x_3 - x_1) + f(x_4)(x_5 - x_3) + \dots$. Предел этой функции в точке ∞ (как говорят, при мелкости разбиения, стремящейся к 0), называется интегралом (Римана) от функции f и обозначается $\int_0^1 f(t)\,dt$. Если расшифровать в данном случае понятие предела, то получим, что $a = \int_0^1 f(t)\,dt$, если для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольного разбиения $x_1 < \dots < x_N$ с мелкостью, меньшей δ, выполнено неравенство $|I_f(x_1,\dots,x_N) - a| < \epsilon$.