ЛЕКЦИИ 10 И 11 (ЧАСТИЧНО)

Краткое содержание. Критерий почленной дифференцируемости ряда. Теорема о разбиении единицы. Максимальные идеалы в кольце гладких функций.

Теорема 1. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, $p \in X$, и $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — отображение, причем $f(x,t) \to f(p,t)$ при $x \to p$ равномерно по $t \in [a,b]$. Пусть при каждом $x \in X$ существует $\int_a^b f(x,t)\,dt$. Тогда $\int_a^b f(p,t)\,dt$ также существует и равен $\lim_{x\to p}\int_a^b f(x,t)\,dt$.*

Доказательство. Поскольку сходимость $f(x,t) \to f(p,t)$ равномерная, для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \subset X$ точки p такая, что если $x \in U$, то $|f(x,t) - f(p,t)| < \varepsilon$. Пусть τ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Имеем при $x \in U$ неравенство $|I_a^b(\tau, f(x,\cdot)) - I_a^b(\tau, f(p,\cdot))| < \varepsilon(b-a)$, откуда следует, что $I_a^b(\tau, f(x,\cdot)) \to I_a^b(\tau, f(p,\cdot))$ при $x \to p$ равномерно по τ. Поэтому $\lim_{x\to p}\int_a^b f(x,t)\,dt = \lim_{x\to p}\lim_{\mu(\tau)\to 0} I_a^b(\tau, f(x,\cdot)) = \lim_{\mu(\tau)\to 0}\lim_{x\to p} I_a^b(\tau, f(x,\cdot)) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. □

Следствие 1. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, $p \in X$, и $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — отображение. Пусть при каждом x существует производная $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \to g(t)$ при $x \to p$ равномерно по $t \in [a,b]$. Пусть также $f(x,a) \to f(p,a)$ при $x \to p$. Тогда существует функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x,t) \to \varphi(t)$ при $x \to p$ равномерно по $t \in [a,b]$, и $g(t) = \varphi'(t)$.*

Следствие 2 (следствия 1)**.** *Пусть $\sum_n f_n(x)$ — сходящийся ряд из дифференцируемых функций, причем ряд $\sum_n f_n'(x)$ сходится равномерно в некоторой окрестности точки a, и ряд $\sum_n f_n(a)$ сходится. Тогда исходный ряд сходится равномерно к функции f, дифференцируемой в точке a, причем $f'(a) = \sum_n f_n'(a)$.*

Коротко: ряд можно дифференцировать почленно, если он сходится, а ряд из производных сходится равномерно.

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, имеющая в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ все частные производные всех порядков, называется бесконечно дифференцируемой. Множество бесконечно дифференцируемых функций обозначается $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество, то $C^\infty(M)$ обозначается множество функций $f : M \to \mathbb{R}$, являющихся ограничениями на M каких-либо бесконечно гладких функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Пусть $\sum_n a_n x^n$ — степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$. Тогда сумма этого ряда $f(x)$ бесконечно дифференцируема при $|x| < R$, и $f^{(k)}(x) = \sum_n a_n (x^n)^{(k)} = \sum_n a_n \cdot n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$.*

Доказательство. В силу формулы для радиуса сходимости степенного ряда и равенства $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ радиусы сходимости исходного ряда и ряда для $f^{(k)}(x)$ совпадают. Кроме того, все степенные ряды сходятся при $x = 0$. Нужный результат теперь получается k-кратным применением следствия 2. □

Определение. *Алгеброй* (над полем действительных чисел) называется множество A, наделенное операциями сложения, умножения и умножения на действительные числа так, что относительно сложения и умножения она образует кольцо, относительно сложения и умножения на действительные числа — векторное пространство, и умножение является билинейной операцией: $(\lambda a)\cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$, где $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Идеалом в алгебре A называется подмножество $I \subset A$, являющееся одновременно идеалом в кольце и линейным подпространством.

Иными словами, идеал I замкнут относительно сложения, выдерживает умножение на произвольный элемент алгебры и на произвольный скаляр. Отсюда следует, что пересечение любого семейства идеалов (конечного или бесконечного) опять представляет собой идеал. Пересечение всех идеалов, содержащих данное множество $\mathcal{F} \subset A$ элементов алгебры, называется идеалом, порожденным множеством $\mathcal{F}$. Нетрудно показать, что он состоит в точности из всех конечных линейных комбинаций (произвольной длины) $\sum_i \lambda_i f_i$, где $f_i \in \mathcal{F}$ — произвольные элементы, а $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — произвольные скаляры. Очевидно, если $1 \in I$, то $I = A$ — действительно, $f = f \cdot 1 \in I$ для произвольного элемента $f \in A$.

Пример 1. Пусть X — произвольное топологическое пространство. Тогда множество $C(X)$ непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ образует алгебру относительно операций поточечного сложения и умножения и умножения на действительные числа. Множества $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty(M)$ (где $M \subset \mathbb{R}^n$ произвольно) также образуют алгебры относительно этих операций. Примеры идеалов в этих алгебрах см. ниже.

Пусть A — алгебра, обладающая одновременно структурой топологического пространства. Говорят, что A — *топологическая алгебра*, если операции сложения, умножения и умножения на число в ней непрерывны (уточните, что это значит !). В топологической алгебре часто рассматривают замкнутые идеалы; поскольку пересечение любого семейства замкнутых идеалов — замкнутый идеал, можно говорить о замкнутом идеале, порожденном данным семейством $\mathcal{F} \subset A$ элементов алгебры.

Идеал $I \subset A$ называется *максимальным*, если для всякого элемента $f \notin A$ идеал, порожденный $I \cup \{f\}$, совпадает со всей алгеброй A — иными словами, если идеал I не является собственным подмножеством никакого нетривиального идеала.

Предложение 1. *Для всякой коммутативной алгебры A и для произвольного идеала $I \subset A$ существует максимальный идеал $J \supset I$.*

Доказательство предложения 1 использует методы общей теории множеств (аксиому выбора); мы его не приводим.

Теорема 2. *Пусть A — алгебра $C(X)$, где топологическое пространство X компактно, или алгебра $C^\infty(X)$, где подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Пусть $a \in X$. Тогда множество $I_a = \{f \in A \mid f(a) = 0\}$ является максимальным идеалом в алгебре A. Всякий максимальный идеал $I \subset A$ имеет вид I_a для некоторого $a \in X$.*

Доказательство. Очевидно, множество I_a является идеалом. Пусть $f \notin I_a$, т.е. $f(a) \neq 0$. Функция $\mu(x) = 1 - f(x)/f(a)$ обращается в нуль в точке a — следовательно, $\mu \in I_a$. Но тогда $1 = \mu(x) + f(x)/f(a)$, откуда следует, что идеал, порожденный I_a и функцией f, содержит 1 и, следовательно, тривиален.

Для доказательства обратного утверждения нам потребуется

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha\} \subset A$ — набор функций (конечный или бесконечный), не имеющих общих нулей. Тогда идеал $I \subset A$, порожденный этими функциями, тривиален.*

Доказательство. По условию, для каждой точки $x \in X$ существует функция $f_x \in \mathcal{F}$ такая, что $f_x(x) \neq 0$. Множество $U_x = \{y \in X \mid f_x(y) \neq 0\}$ открыто и содержит точку x, поэтому $\bigcup_{x \in X} U_x = X$. Поскольку X — компакт, найдется конечный набор точек $x_1, \dots, x_N$ такой, что $X = \bigcup_{i=1}^N U_{x_i}$. Функция $f(x) = \sum_{i=1}^N f_{x_i}^2(x)$ принадлежит идеалу I и не обращается в нуль нигде на X. Следовательно, функция $1 = f(x)/f(x)$ также принадлежит идеалу I, и $I = A$. □

Пусть теперь $I \subset A$ — максимальный идеал. Согласно лемме 1 существует точка $a \in X$ такая, что $f(a) = 0$ при всех $f \in I$, т.е. $I \subset I_a$. Поскольку идеал I максимален, $I = I_a$. □

Лемма 2. *Существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, положительная при $-1 < x < 1$, равная 0 при всех прочих x и такая, что $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 1$.*

Доказательство. Положим $g(x) = e^{-1/(1-x^2)^2}$ при $-1 < x < 1$ и $g(x) = 0$ при всех прочих x. Бесконечная дифференцируемость функции g в точках $x \neq \pm 1$ очевидна, а в точках $x = \pm 1$ доказывается так же, как в примере 3 лекции 8. Положим теперь по определению $f(x) = g(x)/G$, где $G \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 g(x)\,dx > 0$. □

Лемма 3. *Существует функция $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, неотрицательная всюду, равная 1 при $|x| \leq 1/2$ и равная 0 при $|x| \geq 1$.*

Доказательство. Положим $g(x) = 2\int_{x-1/2}^{x+1/2} f(2y)\,dy$, где f — функция из леммы 2. □

Следствие (леммы 3)**.** *Пусть $C \subset B \subset \mathbb{R}^n$ — два несовпадающих шара с общим центром. Тогда существует функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = 0$ для $x \notin B$ и $\varphi(x) = 1$ для $x \in C$.*

Семейство открытых множеств $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым покрытием $\mathbb{R}^n$, если $\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathbb{R}^n$. Покрытие называется локально конечным, если у каждой точки $a \in \mathbb{R}^n$ имеется окрестность, пересекающаяся только с конечным числом множеств U_α.

Для произвольной функции $f : X \to \mathbb{R}$, где X — топологическое пространство, назовем *носителем* функции f множество $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$.

Теорема 3 (о разбиении единицы)**.** *Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такое семейство функций $\varrho_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\varrho_\alpha(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp}(\varrho_\alpha) \subset U_\alpha$ и $\sum_\alpha \varrho_\alpha(x) \equiv 1$.*

Последнее утверждение означает, что для всякого x существует только конечное множество индексов α таких, что $\varrho_\alpha(x) > 0$, и что сумма $\varrho_\alpha(x)$ по всем таким индексам равна 1.

Доказательство. Прежде всего заменим покрытие U_α локально конечным. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ существует конечное множество индексов $\alpha_1^{(N)}, \dots, \alpha_{q_N}^{(N)}$ таких, что $U_{\alpha_1^{(N)}} \cup \dots U_{\alpha_{q_N}^{(N)}}$ содержит шар радиуса N с центром в начале координат. Все множества $U_i^{(j)}$ образуют локально конечное покрытие $\mathbb{R}^n$; мы будем его по-прежнему обозначать U_α, а для выкинутых множеств U_α положим в дальнейшем $\varrho_\alpha \equiv 0$.

Для всякой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует шар B_x с центром в этой точке, целиком содержащийся в одном из множеств U_α. Обозначим C_x шар с центром x, радиус которого вдвое меньше, чем радиус шара B_x. Для всякого $N \in \mathbb{N}$ существует конечный набор точек $x_1^{(N)}, \dots, x_{p_N}^{(N)}$ таких, что шары $C_{x_1^{(N)}}, \dots, C_{x_{p_N}^{(N)}}$ покрывают кольцо $\{x \in \mathbb{R}^n \mid N \le |x| \le N+1\}$. Всего имеется счетное множество таких шаров $C_{x_i^{(k)}}$; перенумеруем его произвольным образом и обозначим получившиеся шары $C_1, C_2, \dots$, а соответствующие шары вдвое большего радиуса — $B_1, B_2, \dots$.

Согласно следствию леммы 3, для каждого i существует функция $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi_i(x) \ge 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_i(x) = 0$ для $x \notin B_i$ и $\varphi_i(x) = 1$ для $x \in C_i$. Обозначим теперь W_α множество тех i, что $B_i \subset U_\alpha$, и положим $\psi_\alpha = \sum_{i \in W_\alpha} \varphi_i$. Нетрудно убедиться, что функции ψ_α удовлетворяют всем требованиям теоремы, кроме того, что их сумма $\psi(x)$ не равна 1. Тем не менее, $\psi(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, и мы можем положить $\varrho_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi_\alpha/\psi$. □

Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ и произвольного набора индексов $l = (l_1, \dots, l_n)$ обозначим $r_{N,l}(f) = \max_{|x| \le N} \left|\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}(x)\right|$ (это число существует, поскольку все частные производные функции f непрерывны). Множество наборов (N, l) счетно — перенумеруем его произвольным образом числами $1, 2, \dots$; таким образом, для каждой функции f мы определили счетное семейство *полунорм* $\varrho_1(f), \varrho_2(f), \dots$. Назовем расстоянием между функциями $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ величину $\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(f-g)}{1+\varrho_n(f-g)}$. Нетрудно проверить (проделайте это !), что ϱ — действительно метрика, и что сходимость семейства функций $f_a \to f$ при $a \to p$ (a, p — элементы произвольного метрического пространства) в топологии пространства $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, определенной этой метрикой, означает, что $f_a \to f$ при $a \to p$ равномерно на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$, и то же самое верно для их частных производных любого порядка.

Теорема 4. *Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка. Множество $I_a = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f(a) = 0\}$ является замкнутым максимальным идеалом в алгебре $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Всякий замкнутый максимальный идеал I имеет вид I_a для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Очевидно, множество I_a замкнуто и является идеалом. Максимальность идеала I_a доказывается так же, как и в теореме 2. Обратное утверждение также совершенно аналогично, только нам потребуется аналог леммы 1:

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — набор функций (конечный или бесконечный), не имеющих общих нулей. Тогда замкнутый идеал $I \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, порожденный этими функциями, тривиален.*

Доказательство. Пусть $U_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\alpha(x) > 0\}$ и $V_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\alpha(x) < 0\}$. Множества U_α, V_α образуют открытое покрытие $\mathbb{R}^n$; пусть ϱ_α — соответствующее разбиение единицы (см. теорему 3). Сменим у функций ϱ, соответствующих множествам V, знак на противоположный. Тогда $f(x) = \sum_\alpha \varrho_\alpha(x) f_\alpha(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку I — замкнутый идеал, порожденный f_α, $f \in I$. Но тогда $1 = f(x)/f(x) \in I$, и идеал I тривиален. □

□

Если в условии теоремы 4 опустить требование замкнутости, то утверждение становится неверным. Действительно, пусть $I \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — множество функций, носитель которых компактен. Очевидно, I — идеал. Согласно предложению 1 существует максимальный идеал $J \supset I$. Но идеал J не может совпадать с I_a ни при каком a, поскольку функции из идеала I не имеют общих нулей.