ЛЕКЦИЯ 2

Abstract. Свойства непрерывных функций. Связные и линейно связные пространства.

Пусть X, Y, Z — топологические пространства, $f : X \to Y$, $h : Y \to Z$ и $g : X \to Z$ — непрерывные отображения

Теорема 1. *Композиция $h \circ f$ непрерывна. Декартово произведение отображений $(f, g) : X \to Y \times Z$ (определяемое формулой $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$) непрерывно.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе: пусть $U \subset Y \times Z$ открыто, и $x \in (f, g)^{-1}(U) \Leftrightarrow (y, z) \in U$, где $y = f(x)$, $z = g(x)$. В силу открытости множества U найдется пара множеств $V \subset Y$, $W \subset Z$ такая, что $y \in V$, $z \in W$ и $V \times W \subset U$. Тогда $(f, g)^{-1}(U) \supset f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W) \stackrel{\text{def}}{=} R_x$. Это означает, что вместе с каждой своей точкой x множество $f^{-1}(U)$ содержит и некоторую ее (открытую) окрестность R_x. Таким образом, отображение f непрерывно в каждой точке, и, следовательно, непрерывно. $\square$

Определим теперь "базовые" функции на множестве действительных чисел:

- $\mathrm{plus} : (\overline{\mathbb{R}})^2 \setminus \{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\} \to \overline{\mathbb{R}}$: $\mathrm{plus}(x, y) = \begin{cases} x + y, & x, y \in \mathbb{R} \\ +\infty, & x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, y = +\infty \\ +\infty, & x = +\infty, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ -\infty, & x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, y = -\infty \\ -\infty, & x = -\infty, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{cases}$,
- $\mathrm{mult} : (\overline{\mathbb{R}})^2 \setminus \{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\} \to \overline{\mathbb{R}}$ — аналогично, с заменой сложения на умножение.
- $\mathrm{inv} : \widetilde{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathbb{R}}$: $\mathrm{inv}(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty, & x = 0 \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$

Предложение 1. *Отображения* plus, mult, inv *непрерывны.*

Доказательство — прямая проверка.

Примеры следствий из предложения 1 и теоремы 1:

- Сумма непрерывных функций непрерывна.
- Предел произведения равен произведению пределов, если последнее определено (т.е. кроме случая, когда один предел равен нулю, а второй бесконечен).

И т.п.

Теорема 2. *Пусть $M \subset X$ замкнуто, $f : \mathbb{N} \to M$ — последовательность, и $a = \lim_{n\to\infty} f(n)$. Тогда $a \in M$. Если $X = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$, то верно и обратное: если* *для всякой сходящейся (имеющей предел) последовательности* $f : \mathbb{N} \to M$ *верно, что* $a \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} f(n) \in M$, *то множество* M *замкнуто.*

Доказательство. Продолжим отображение f на множество $\overline{\mathbb{N}}$, полагая $f(\infty) = a$. Тогда $f : \overline{\mathbb{N}} \to X$ непрерывно и, следовательно, прообраз $f^{-1}(X \setminus M)$ открыт. Если $\infty \in f^{-1}(X \setminus M)$ (что эквивалентно тому, что $a \notin M$), то существует N такое, что при $n > N$ имеем $n \in f^{-1}(X \setminus M)$, то есть $f(n) \notin M$, вопреки условию теоремы.

Обратное для $X = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$: пусть M не замкнуто. Тогда имеется точка $a \in X \setminus M$ такая, что никакой интервал $(a-\delta, a+\delta)$ в множестве $X \setminus M$ не лежит. Выберем в качестве $f(n)$ произвольную точку из интервала $(a - 1/n, a + 1/n)$, не лежащую в $X \setminus M$, т.е. лежащую в M. Тогда $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$, вопреки условию теоремы. □

Нетрудно видеть, что список пространств во второй части предложения можно существенно расширить — утверждение верно для $X = \mathbb{R}^n$, и вообще, почти для всех пространств, используемых в анализе. Для произвольного топологического пространства оно все же неверно.

Предложение 2. *Пусть* $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *тогда и только тогда, когда для всякой последовательности* $g : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ *такой, что* $\lim_{n\to\infty} g(n) = a$ *выполнено равенство* $\lim_{n\to\infty} f(g(n)) = b$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Продолжим последовательность g до непрерывного отображения $\overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{R}}$, полагая $g(\infty) = a$. Поскольку композиция непрерывных отображений непрерывна, то отображение $f \circ g : \overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывно в точке ∞ — это как раз и означает, что $\lim_{n\to\infty} f(g(n)) = b$.

Обратно, пусть $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$. Зафиксируем какую-нибудь счетную систему вложенных окрестностей $U_1 \supset U_2 \supset \dots \ni a$ такую, что $\bigcap_n U_n = \{a\}$ (если $a \in \mathbb{R}$, то можно взять $U_n = (a - 1/n, a + 1/n)$, если $a = +\infty$, то $U_n = (n, +\infty]$, и т.п.) Тогда найдется такая окрестность V точки b, что для всякого n существует элемент $x_n \in U_n$, для которого $f(x_n) \notin V$. Положим $g(n) = x_n$, тогда $\lim_{n\to\infty} g(n) = a$ в силу выбора системы окрестностей U_n, но $\lim_{n\to\infty} f(g(n)) \neq b$. □

В произвольном топологическом пространстве X множества $\varnothing$ и X являются одновременно открытыми и замкнутыми. Пространство X называется *связным*, если в нем нет никаких других подмножеств, обладающих этим свойством. Если подмножество $A \subset X$ открыто, замкнуто и связно (т.е. не содержит собственных подмножеств, открытых и замкнутых одновременно), то оно называется компонентой связности пространства X.

Теорема 3. *Пусть* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение топологических пространств, и пространство* X *связно. Тогда образ* $f(X) \subset Y$ *также связен.*

Доказательство. Пусть множество $f(X) \subset Y$ несвязно. По определению топологии на подмножестве пространства Y это означает, что существуют два открытых подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ такие, что $f(X) \subset Y_1 \cup Y_2$, $f(X) \cap Y_1 \neq \varnothing \neq f(X) \cap Y_2$, но $f(X) \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. По определению непрерывного отображения прообразы $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ и $X_2 = f^{-1}(Y_2)$ открыты в X. Нетрудно видеть, что $X = X_1 \cap X_2$, $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$, но $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Это противоречит связности пространства X. □

Важнейший для анализа пример связного множества — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Доказательство связности отрезка мы отложим до следующей лекции.

Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для произвольных двух точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \to X$ такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$ (иными словами, существует непрерывная кривая, соединяющая точки a и b).

Теорема 4. *Линейно связное топологическое пространство X связно.*

Доказательство. Пусть X линейно связно, но не связно: $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 открыты и не пересекаются. Возьмем $a \in X_1$, $b \in X_2$ и рассмотрим отображение $f : [0, 1] \to X$ из определения линейно связного пространства. Тогда множества $T_1 = f^{-1}(X_1) \subset [0, 1]$ и $T_2 = f^{-1}(X_2) \subset [0, 1]$ открыты (поскольку отображение f непрерывно), непусты (поскольку $0 \in T_1$. $1 \in T_2$) и не пересекаются (поскольку не пересекаются X_1 и X_2), а их объединение — весь отрезок $[0, 1]$. Это противоречит теореме 3. $\square$

Пример 1. Примеры линейо связных (и, следовательно, связных) пространств: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, шар в $\mathbb{R}^n$, произвольное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, и т.д.

Пример 2. Пространство $\mathbb{Q}$ несвязно. Действительно, если $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$, то $\mathbb{Q} \setminus A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$, и оба множества открыты и непусты. Более того, пространство $\mathbb{Q}$ не содержит ни одного открытого связного подмножества (и, следовательно, напрашивающееся утверждение, что всякое топологическое пространство можно разбить на компоненты связности, неверно). Действительно, если подмножество $A \subset \mathbb{Q}$ содержит более одной точки, то рассуждение, аналогичное только что приведенному (проведите его !), показывает, что A несвязно. Одноточечные же подмножества $\mathbb{Q}$ не являются открытыми (т.е. топология $\mathbb{Q}$ не дискретна), и тем самым не могут быть компонентами связности.