ЛЕКЦИЯ 3

Abstract. Определение и свойства действительных чисел. Приложение теоремы о существовании точной верхней грани у ограниченного множества.

В данной лекции мы предполагаем, что определение рациональных чисел и действий над ними известно. В множестве $\mathbb{Q}$ определена топология, базу окрестностей в которой составляют интервалы $(a,b) = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$.

Действительным (вещественным) числом называется такое подмножество $a \subset \mathbb{Q}$ такое, что

1. $a \neq \varnothing$, $a \neq \mathbb{Q}$.
2. Если $x \in a$ и $y < x$, то $y \in a$.
3. Множество $a \subset \mathbb{Q}$ замкнуто.

Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$. Неформально говоря, действительное число a мы определяем как множество рациональных чисел x таких, что $x \leq a$. Множество $\mathbb{Q}$ можно вложить в множество $\mathbb{R}$, сопоставив каждому рациональному числу a множество $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}$ — таким образом, можно считать, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Будем говорить, что $a < b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, если $a \subset b$ (как подмножества в $\mathbb{Q}$). Положительным называется действительное число, большее нуля (действительное число 0 определено ранее, т.к. $0 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$). Число $-a$, противоположное числу a, определяется как замыкание множества $\{x \mid -x \notin a\}$. Суммой действительных чисел a и b называется замыкание множества $\{x + y \mid x \in a, y \in b\}$. Произведение ab двух положительных чисел определяется как замыкание множества $\{xy \mid x \in a, y \in b, x > 0, y > 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$. Если одно из чисел a, b или оба они неположительны, то произведение ab определяется по правилу знаков.

Теорема 1. *Определения операций над действительными числами корректны. Сложение и умножение обладают всеми стандартными свойствами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и проч.) — иными словами, множество $\mathbb{R}$ с введенными операциями сложение и умножения является полем. Отношение $<$ является отношением строгого линейного порядка: из неравенств $a < b < c$ следует $a < c$, и для любых различных действительных чисел a и b выполнено либо неравенство $a < b$, либо неравенство $b < a$. Неравенство $a < b$ равносильно условию положительности числа $(-a) + b$. Сумма и произведение положительных чисел положительны.*

Доказательство. представляет собой длинный перечень рутинных проверок, использующих приведенные выше определения и свойства рациональных чисел. Проверим, например, корректность определения сложения — докажем, что определенное выше множество $a + b$ на самом деле представляет собой действительное число. По определению, множество $a + b$ замкнуто и непусто. Очевидно также, что $a + b \neq \mathbb{Q}$: существуют рациональные числа M и N такие, что $\forall x \in a : M > x$ и $\forall y \in b : N > y$. Тогда, очевидно, $M + N \notin a + b$. Пусть теперь $z \in a + b$ и $w < z$. Из утверждения о структуре замкнутых множеств в $\mathbb{Q}$, доказанного в предыдущей лекции, следует, что существуют последовательности рациональных чисел $x_n \in a$ и $y_n \in b$ такие, что $x_n + y_n \to z$ при $n \to \infty$. Из неравенства $y_n - z + w < y_n$ следует, что $y_n - z + w \in b$, откуда вытекает, что число $w = \lim_{n\to\infty} x_n + (y_n - z + w)$ принадлежит $a + b$. Аналогично проверяется корректность определения умножения и доказываются основные свойства этих действий.

Утверждение, что из неравенств $a < b < c$ следует $a < c$, очевидно следует из определения. Докажем, что из всяких двух действительных чисел ровно одно больше другого. Пусть это не так: найдутся два числа $a \neq b$, которые не являются подмножествами друг друга — существуют числа $x \in b \setminus a$ и $y \in a \setminus b$. Тогда если $x < y$, то по определению должно быть $x \in a$ — противоречие; аналогично в случае $y < x$.

Доказательство двух последних утверждений теоремы — несложное упражнение. □

Говорят, что число s ограничивает множество $A \subset \mathbb{R}$ сверху, если $\forall x \in A : s \geq x$. Множество A называется ограниченным сверху, если существует число, ограничивающее его сверху. Наименьшее из чисел, ограничивающих данное множество A сверху, называется его *точной верхней гранью* и обозначается $\sup A$.

Теорема 2. *У всякого ограниченного сверху множества действительных чисел имеется точная верхняя грань.*

Доказательство. В качестве действительного числа $\sup A$ (как множества рациональных чисел) можно взять замыкание M множества $\bigcup_{x \in A} x$. Оно по определению замкнуто и непусто. Оно не совпадает с $\mathbb{Q}$ поскольку по условию теоремы существует такое рациональное число s что $\forall x \in A : s > x$ — очевидно,

$s \notin M$. Пусть теперь $z \in M$ и $w < z$. Тогда существует последовательность $x_n \to z$ при $n \to \infty$ такая, что $\forall n\, \exists u_n \in A : x_n \in u_n$. Но тогда $x_n - z + w \in u_n$, откуда следует, что $w = \lim_{n\to\infty}(x_n - z + w)$ также является элементом множества M. Таким образом, множество M представляет собой действительное число.

Докажем теперь, что число M ограничивает множество A сверху. Если это не так, то $\exists u \in A : u > M$. Иными словами, $\exists u \in A\, \exists x \in u\, \forall m \in M : x > m$. Но если $x \in u \in A$, то $x \in M$ — противоречие.

Докажем, что среди всех чисел, ограничивающих множество A сверху, M является наименьшим. Действительно, пусть $N < M$. Тогда существует рациональное число x такое, что $N < x < M$ и, следовательно, $x \in M$. Это означает, что $\exists u \in A : x \in u$. Но отсюда вытекает, что $u \geq x > N$ и, следовательно, N не ограничивает множество A сверху. $\square$

Следствие 1. *Произвольная возрастающая ограниченная последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ имеет предел при $n \to \infty$.*

Доказательство. Множество $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ ограничено и, следовательно, имеет точную верхнюю грань $a = \sup f(\mathbb{N})$. Докажем, что $a = \lim_{n\to\infty} f(n)$. Действительно, для произвольного $\epsilon > 0$ число $a - \epsilon$ не ограничивает множество $f(\mathbb{N})$ сверху, а число a — ограничивает, поэтому найдется такое N, что $a - \epsilon < f(N) < a$. Поскольку последовательность f возрастающая, это неравенство верно и для всех $n > N$. $\square$

Следствие 2. *Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ — последовательность вложенных отрезков на действительной оси. Тогда пересечение $\bigcap_n [a_n, b_n]$ непусто.*

Доказательство. Множество $\{a_1, a_2, \dots\}$ ограничено сверху любым из чисел $b_1, b_2, \dots$. Поэтому число $a \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n a_n$ существует и удовлетворяет неравенству $a \leq b_i$ при всех $i = 1, 2, \dots$. Тем самым оно принадлежит изучаемому пересечению. $\square$

Следствие 3. *Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — связное множество.*

Доказательство. Пусть $[a, b] = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 открыты, замкнуты, непусты и не пересекаются. Пусть $b \in A_2$; положим $p = \sup A_1$, тогда $p < b$. Пусть $p \in A_1$. Поскольку A_1 открыто и $p < b$, существует такое $\delta > 0$, что $(p, p + \delta) \subset A_1$, вопреки тому, что p ограничивает множество A_1 сверху. Если же $p \in A_2$, то поскольку A_2 открыто и $p > a$ (очевидно), то существует такое $\delta > 0$, что $(p - \delta, p) \subset A_2$, вопреки тому, что p — наименьшее из чисел, ограничивающих множество A_1 сверху. $\square$

Следствие 4 (следствия 3 — теорема о промежуточном значении)**.** *Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, причем $f(0) < 0$, а $f(1) > 0$. Тогда существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$.*

Ясно, что отрезок $[0, 1]$ можно заменить любым другим отрезком, а значение 0 — любым другим вещественным числом. Коротко говорят: непрерывная функция, принимая два значения, принимает и всякое промежуточное значение.

Доказательство. Пусть $f(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Тогда $[0, 1] = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = f^{-1}((-\infty, 0))$ и $X_2 = f^{-1}((0, +\infty))$. Множества X_1, X_2 открыты, непусты и не пересекаются, вопреки следствию 3. $\square$