ЛЕКЦИЯ 4

Abstract. Следствия теоремы о промежуточном значении. Определение и простейшие свойства компактов. Компактность отрезка. Лемма Гейне–Бореля.

Вот пример утверждения, которое можно вывести из теоремы о промежуточном значении:

Предложение 1. *Для всякого $a > 0$ и всякого $n \in \mathbb{N}$ существует и единственно число $b > 0$ такое, что $b^n = a$.*

Доказательство. Единственность следует из монотонности операции возведения в степень: если $b_1 > b_2$, то $b_1^n > b_2^n$, поэтому равенство $b^n = a$ возможно максимум для одного значения b. Для доказательства существования заметим, что функция $f(x) = x^n$ непрерывна — это следует (индукция по n) из того, что произведение непрерывных функций непрерывно. Поскольку $f(0) = 0 < a$, и существует такое s, что $f(s) > a$, (можно взять $s = a$, если $a \geq 1$, и $s = 1$, если $a < 1$), требуемое утверждение следует из теоремы о промежуточном значении. □

Теорема, обратная к теореме о промежуточном значении, конечно же, неверна. Она, однако, становится верной в предположении *монотонности* функции:

Предложение 2. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Если для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ и произвольного $x \in [f(t_1), f(t_2)]$ существует $t \in [t_1, t_2]$ такое, что $f(t) = x$, то функция f непрерывна.*

Доказательство. Предположим для определенности, что функция f монотонно возрастает. Пусть f разрывна в некоторой точке t_0. Обозначим $m = \sup_{t<t_0} f(t)$, $M = \inf_{t>t_0} f(t)$ (inf — точная нижняя грань). Очевидно, разрывность означает, что $m < M$. Но тогда функция f не принимает ни одного значения из интервала (непустого !) (m, M), за исключением значения $f(t_0)$. □

Следствие. *Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенная равенством $f(a) = a^r$, где r — произвольное действительное число, непрерывна.*

Доказательство. Согласно предложению 2, достаточно доказать, что для произвольного $b \in \mathbb{R}_+$ существует $a \in \mathbb{R}_+$ такое, что $a^r = b$. Если $r = p/q \in \mathbb{Q}$, то это следует из предложения 1. Если $r \notin \mathbb{Q}$, то можно взять $b = \sup_{s<r, s\in\mathbb{Q}} a^{1/s}$. □

Аналогично доказывается, что показательная функция определена и непрерывна.

Совокупность (конечная или бесконечная) подмножеств $U_\alpha \subset X$ топологического пространства X называется покрытием, если $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Топологическое пространство X называется компактным, если в любом его покрытии открытыми множествами U_α можно выбрать конечный набор множеств $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$, которые также образуют покрытие.

Пример 1. Действительная прямая $\mathbb{R}$ некомпактна. Действительно, рассмотрим набор интервалов $U_n = (n, n+2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Множества U_n открыты и образуют покрытие $\mathbb{R}$. Всякий конечный набор множеств $U_{n_1}, \ldots, U_{n_N}$, однако, содержится внутри достаточно большого отрезка, и прямой не покрывает.

Теорема 1. *Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие отрезка $[a, b]$ открытыми множествами. Обозначим $M \subset [a, b]$ множество точек $x \in [a, b]$, что отрезок $[a, x]$ можно покрыть конечным набором множеств U_α. Мы докажем, что $M = [a, b]$ (или, что то же самое, $b \in M$).

Множество M открыто. Действительно, пусть $x \in M$. Поскольку $\{U_\alpha\}$ — покрытие, найдется такое α_0, что $x \in U_{\alpha_0}$. Множество U_{α_0} открыто, поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что $[x, x+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ (за исключением случая, когда $x = b$, но тогда теорема уже доказана). Отсюда следует, что $(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2) \subset M$ (и, тем самым, M открыто), поскольку если $y \in (x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2)$, то отрезок $[a, y]$ покрывается объединением тех U_α, которые покрывают отрезок $[a, x]$, и множества U_{α_0} — всего конечное количество множеств U_α.

Множество M замкнуто. Действительно, пусть $y \in [a, b] \setminus M$. Для некоторого α_1 имеем $y \in U_{\alpha_1}$, и поэтому $(y - \delta, y + \delta) \subset U_{\alpha_1}$ для некоторого δ. Множество M не пересекает интервал $(y - \delta, y + \delta)$ (и, тем самым, $[a, b] \setminus M$ открыто, а M замкнуто), поскольку если $x \in M \cap (y - \delta, y + \delta)$, то отрезок $[a, y]$ покрывается объединением тех U_α, которые покрывают отрезок $[a, x]$, и множества U_{α_1} — всего конечное количество множеств U_α. А это невозможно, т.к. $y \notin M$.

Таким образом, множество $M \subset [a, b]$ открыто, замкнуто и непусто (очевидно, $a \in M$). Из связности отрезка следует, что $M = [a, b]$. □

Теорема 2. *Замкнутое подмножество компактного топологического пространства компактно.*

Доказательство. Пусть X компактно, $M \subset X$ замкнуто, и $\{U_\alpha\}$ — покрытие M открытыми множествами. Если к $\{U_\alpha\}$ добавить открытое множество $V = X \setminus M$, то получится покрытие X. Из этого покрытия можно выбрать конечное число множеств $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}, V$ так, чтобы они по-прежнему покрывали X. Тогда множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ покрывают M. □

Теорема 3. *Образ компактного пространства при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ непрерывно, X компактно, а $\{U_\alpha\}$ — покрытие образа $f(X) \subset Y$ открытыми множествами. Прообразы $V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U_\alpha) \subset X$ открыты и покрывают X. Тогда существует конечный набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $X = \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$. Но тогда множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ покрывают $f(X)$. □

Топологическое пространство X называется отделимым, если для любых двух различных точек $a, b \in X$ существуют открытые множества $U_a, U_b \subset X$ такие, что $a \in U_a$, $b \in U_b$, $U_a \cap U_b = \varnothing$.

Теорема 4. *Пусть X — отделимое пространство, а $M \subset X$ компактно. Тогда M замкнуто.*

Доказательство. Пусть $y \in X \setminus M$. Для произвольной точки $x \in M$ существуют, в силу отделимости, непересекающиеся окрестности U_x точки x и V_x точки y. Окрестности U_x для всех $x \in M$ образуют покрытие M (поскольку $x \in U_x$). Поэтому существует конечный набор точек $x_1, \dots, x_N \in M$ такой, что $U_{x_1}, \dots, U_{x_N}$ покрывают M. Но тогда множество $V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_N}$ открыто, содержит y и не пересекается с M — следовательно, множество $X \setminus M$ открыто. □

Напомним, что пространство $C[0, 1]$ состоит из непрерывных функций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, а базу окрестностей в нем составляют шары $B_R(f) = \{g \in C[0, 1] \mid \forall t \in [0, 1]\, |f(t) - g(t)| < R\}$. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ или $C[0, 1]$, и $M \subset X$. Подмножество $T \subset M$ называется ε-сетью в M (где $\varepsilon > 0$ — действительное число), если объединение шаров радиуса ε с центрами во всех точках множества T покрывает M.

Теорема 5. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$ или $X = C[0, 1]$, и $M \subset X$ компактно. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ множество M содержит конечную ε-сеть.*

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ шары радиуса ε с центрами во всех точках $x \in M$ покрывают M. Тогда можно выделить конечное число таких шаров так, чтобы они по-прежнему покрывали множество M. □

Следствие 1. *Компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и пространства $C[0, 1]$ ограничено (т.е. лежит в некотором шаре).*

Следствие 2 (следствия 1). *Пусть X — компакт, а $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда образ $f(X)$ ограничен, и $\sup f(X) \in f(X)$ (коротко говорят: непрерывная на компакте функция ограничена и принимает свое наибольшее значение).*

Теорема 6 (лемма Гейне–Бореля). *Замкнутое и ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие M открытыми множествами, среди которых нельзя выделить конечного набора множеств, покрывающих M. Поскольку M ограничено, оно лежит в некотором параллелепипеде $\Pi_1 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Разобьем Π_1 на 2^n меньших параллелепипеда, разделив каждый из отрезков $[a_i, b_i]$ пополам. Хотя бы один из полученных параллелепипедов обладает тем свойством, что его пересечение с M по-прежнему не покрывается никаким конечным набором множеств U_α. Назовем этот параллелепипед Π_2. Аналогично построим Π_3, и т.д. Полученная последовательность параллелепипедов $\Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \dots$ имеет, согласно принципу вложенных отрезков, общую точку x. Поскольку M замкнуто, $x \in M$ и, следовательно, $x \in U_{\alpha_0}$ для некоторого α_0. Но тогда для достаточно большого k имеет место включение $\Pi_k \subset U_{\alpha_0}$, что противоречит выбору Π_k. □

Пример 2. Для пространства $C[0, 1]$ лемма Гейне–Бореля неверна. Примером замкнутого и ограниченного, но некомпактного множества может служить замкнутый единичный шар с центром в нуле, т.е. множество $B = \{f \in C[0, 1] \mid \forall t \in [0, 1]\, |f(t)| \le 1\}$. Действительно, функции $f_n(t) = \sin 3^n \pi t$ принадлежат B и обладают тем свойством, что $\max_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| = 2$ для всех m и n. Отсюда, очевидно, следует, что при $\varepsilon < 1$ множество B не содержит конечной ε-сети.