ЛЕКЦИЯ 5

Abstract. Предельные точки. Метрические пространства. Полнота $\mathbb{R}$ и $C[0,1]$.

Точка $a \in X$ называется предельной точкой подмножества $M \in X$, если для каждого открытого множества $U \ni a$ пересечение $U \cap M$ бесконечно.

Теорема 1. *В компактном топологическом пространстве X всякое бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Доказательство. Пусть $M \subset X$ бесконечно и не имеет предельных точек. Тогда каждая точка $a \in X$ имеет окрестность U_a, пересекающую M только в конечном числе точек. Множества U_a, $a \in X$ образуют покрытие пространства X. Выберем из него конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_N$. Но каждое из множеств U_i содержит только конечное число точек множества M, что противоречит бесконечности M. $\square$

Пример 1. В случае, когда $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, а $M = \{m_1, \dots, m_n, \dots\}$ — счетное множество, теорема 1 превращается в такое утверждение: всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Множество X называется *метрическим пространством*, если задана функция (*метрика*, или *расстояние*) $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. (неотрицательность и невырожденность) $\varrho(a, b) \geq 0$ для всех $a, b \in X$, причем $\varrho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
2. (симметричность) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$
3. (неравенство треугольника) $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$.

Всякое метрическое пространство можно канонически наделить топологией: базу окрестностей составляют шары $B_\varepsilon(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in X \mid \varrho(a, b) < \varepsilon\}$ со всевозможными центрами $a \in X$ и радиусами $\varepsilon > 0$. Тот факт, что шары составляют базу окрестностей, следует из неравенства треугольника: действительно, пусть $b \in B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$. Тогда если $\varrho(b, c) < r \stackrel{\text{def}}{=} \min(r_1 - \varrho(b, a_1), r_2 - \varrho(b, a_2))$, то $\varrho(c, a_1) < r_1$ и $\varrho(c, a_2) < r_2$. Отсюда следует, что $B_r(b) \subset B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$.

Топологическое пространство X называется метризуемым, если на нем существует структура метрического пространства, порождающая ту топологию, которая в X уже имеется. Примеры метризуемых пространств:

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}$: метрика определяется формулой $\varrho(a, b) = |a - b|$. Пространство $C[0,1]$: метрика определяется формулой $\varrho(f, g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$

Пример 3. Если X — метрическое пространство, то его произвольное подмножество $Y \subset X$ тоже метрическое — метрика получается ограничением метрики в X на Y. Очевидно, топология, порождаемая метрикой на Y, совпадает с топологией, индуцированной из X. Так, пространство $\overline{\overline{\mathbb{N}}}$ метризуемо, поскольку оно гомеоморфно множеству $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

Пример 4. Пополненное пространство разбиений отрезка $[0,1]$ метризуемо: можно положить расстояние между двумя произвольными разбиениями равным 1, а расстояние между разбиением τ и идеальным разбиением ∞ — равным $\mu(\tau)$, где $\mu(\tau)$ — мелкость разбиения τ.

Пример 5. Декартово произведение $X = X_1 \times X_2$ двух метрических пространств с метриками ϱ_1 и ϱ_2 можно наделить метрикой $\varrho((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \varrho_1(a_1, b_1) + \varrho_2(a_2, b_2)$ (проверьте свойства !). Топология, порожденная метрикой ϱ, совпадает с топологией декартова произведения.

В случае $\mathbb{R}^n$ эта конструкция дает так называемую метрику ℓ_1: расстояние между точками $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ равно $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Чаще пользуются так называемой метрикой ℓ_2, где это расстояние равно $\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$. Топологии, порождаемые этими метриками, совпадают (почему ?).

Отображение $f : Y \to X$, где X — метрическое пространство, а Y — произвольное топологическое, называется фундаментальным в точке $a \in Y$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U_\varepsilon \subset Y$ точки a, что для произвольных точек $x, y \in U_\varepsilon$ выполнено неравенство $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Теорема 2. *Если отображение f имеет предел в точке a, то оно фундаментально в этой точке. Если $X = \mathbb{R}$, то верно и обратное.*

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U_ε точки $a \in Y$ такая, что $\varrho(f(x), A) < \varepsilon/2$ для всякого $x \in U_\varepsilon$. Если теперь $y \in U_\varepsilon$, то в силу неравенства треугольника $\varrho(f(x), f(y)) \le \varrho(f(x), A) + \varrho(f(y).A) < \varepsilon$.

Обратно, пусть функция $f : Y \to \mathbb{R}$ фундаментально в точке $a \in Y$. Тогда найдется окрестность $U \subset Y$ точки a, в которой f ограничена. Положим $A(\varepsilon) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{x\in U_\varepsilon\setminus\{a\}} f(x)$. Без ограничения общности можно полагать, что $U_{\varepsilon_1} \subset U_{\varepsilon_2}$ при любых $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, откуда следует, что функция $A(\varepsilon)$ монотонно возрастает. Положим $A = \lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon)$ и покажем, что $f(x) \to A$ при $x \to A$. Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число δ такое, что $|A(\delta) - A| < \varepsilon/2$ и $|f(x) - A(\delta) < \varepsilon/2|$ для всякого $x \in U_\delta$. Тогда в окрестности U_δ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. □

Следствие 1. *Числовая последовательность a_i имеет предел (конечный) тогда и только тогда, когда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что при $m, n > N$ имеет место неравенство $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Числовой ряд $\sum_{i=1}^\infty a_i$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $m, n > N$ имеет место неравенство $|\sum_{i=m}^n a_i| < \varepsilon$.*

Следствие 2 (следствия 1)**.** *Если числовой ряд $\sum_{i=1}^\infty |a_i|$ сходится, то ряд $\sum_{i=1}^\infty a_i$ также сходится.*

Метрическое пространство X называется полным, если всякое отображение $f : Y \to X$, фундаментальное в точке a, имеет предел при $x \to a$. Полнота пространства $\mathbb{R}$ составляет утверждение теоремы 2. Нетрудно вывести отсюда (проделайте !), что пространство $\mathbb{R}^n$ с произвольным n также полно. Также нетрудно видеть, что замкнутое подмножество полного метрического пространства полно.

Пусть X и Z — метрические пространства, а Y — произвольное множество, и пусть заданы отображения $f : X \times Y \to Z$, $g : Y \to Z$ и $h : Y \to X$. Говорят, что отображение f сходится при $x \to h(y)$ к отображению g равномерно по $y \in Y$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $y \in Y$ и всякого $x \in B_\delta(h(y))$ имеет место включение $f(x, y) \in B_\varepsilon(g(y))$.

Теорема 3. *Пусть Y — топологическое пространство, отображения $f : X \times Y \to Z$ и $h : Y \to X$ непрерывны, и $f(x, y) \to g(y)$ при $x \to h(y)$ равномерно по $y \in Y$. Тогда отображение $g : Y \to Z$ также непрерывно.*

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что такая, что $\varrho(f(x, y), g(y)) < \varepsilon/3$ для всех $y \in Y$ и всех $x \in B_\delta(h(y))$. Докажем, что отображение g непрерывно в точке $b \in Y$. В силу непрерывности отображения h существует такое $x_* \in X$, что $x_* \in B_\delta(h(y))$ при всех y, принадлежащих некоторой окрестности $U \subset Y$ точки B. Уменьшая, если необходимо, окрестность U, мы можем добиться, чтобы при $y \in U$ также выполнялись неравенства $\varrho(f(x_*, y), f(x_*, b)) < \varepsilon/3$. Тогда для $y \in U$ выполнено неравенство $\varrho(g(y), g(b)) < \varrho(g(y), f(x_*, y)) + \varrho(f(x_*, y), f(x_*, b)) + \varrho(f(x_*, b), g(b)) < \varepsilon$. □

Пример 6. В теореме 3 условие равномерности существенно. Действительно, пусть $Y = [0, 1]$, $X = \overline{\mathbb{N}}$, $Z = \mathbb{R}$ $h(y) \equiv \infty$, $f(n, y) = y^n$. Тогда $g(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f(n, y)$ — разрывная функция, равная 0 при $0 \le y < 1$ и 1 при $y = 1$.

Теорема 4. *Пространство $C[0, 1]$ полно.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to C[0, 1]$ фундаментально при $x \to a$: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки $a \in X$, что $|f(p)(t) - f(q)(t)| < \varepsilon$ для всех $p, q \in U$ и всех $t \in [0, 1]$. Повторяя доказательство теоремы 2, получим, что $f(p)(t) \to g(t)$ при $p \to a$ равномерно по $t \in [0, 1]$. Но тогда $\max_{t\in[0,1]} |f(p)(t) - g(t)| \to 0$ при $p \to a$, т.е. $f(p) \to g$ (в пространстве $C[0, 1]$) при $p \to a$. □