ЛЕКЦИЯ 6

Abstract. Перестановка пределов при равномерной сходимости. Равномерная непрерывность. Существование интеграла Римана от непрерывной функции. Теоремы о промежуточном значении. Формула Ньютона–Лейбница. Принцип сжимающих отображений.

Теорема 1. *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, и $f : X \times Y \to Z$ — отображение. Пусть $f(x,y) \to g(y)$ при $x \to a$ равномерно по y, $f(x,y) \to h(x)$ при $y \to b$ равномерно по x, а $g(y) \to K$ при $y \to b$. Тогда $h(x) \to K$ при $x \to a$, и $f(x,y) \to K$ при $(x,y) \to (a,b)$.*

Доказательство. Равномерная сходимость $f(x,y) \to h(x)$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $\varrho(x,a) < \delta_1$ и произвольном $y \in Y$ выполнено неравенство $\varrho(f(x,y), g(y)) < \varepsilon/2$. Сходимость $g(y) \to K$ означает, что найдется $\delta_2 > 0$ такое, что при $\varrho(y,b) < \delta_2$ выполнено неравенство $\varrho(g(y), K) < \varepsilon/2$. Поэтому в открытом множестве $\{(x,y) \in X \times Y \mid \varrho(x,a) < \delta_1, \varrho(y,b) < \delta_2\}$ выполнено условие $\varrho(f(x,y), K) < \varepsilon$, откуда $f(x,y) \to K$ при $(x,y) \to (a,b)$. Отсюда уже легко следует (проведите подробное доказательство !), что $h(x) \to K$ при $x \to a$. $\square$

Пример 1. Пусть функция $f : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ такова, что $\int_a^b f(\alpha,x)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in U$, где U — некоторая окрестность точки $p \in \mathbb{R}$. Тогда $\left(\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(\alpha,x)\,dx\right)_{\alpha=p} = \int_a^b \left(\frac{d}{d\alpha} f(\alpha,x)\right)_{\alpha=p} dx$. Действительно, $\left(\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(\alpha,x)\,dx\right)_{\alpha=p} = \lim_{h\to 0}\lim_{\mu(\tau)\to 0} \frac{1}{h}(I_a^b(f(p+h,\cdot),\tau) - I_a^b(f(p,\cdot),\tau)) = (*)$. В силу равномерности пределы можно переставить: $(*) = \lim_{\mu(\tau)\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(I_a^b(f(p+h,\cdot),\tau) - I_a^b(f(p,\cdot),\tau)) = \lim_{\mu(\tau)\to 0} I_a^b(\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h,\cdot)-f(p,\cdot)}{h}) \int_a^b \left(\frac{d}{d\alpha} f(\alpha,x)\right)_{\alpha=p} dx$

Пример 2. Теорема о непрерывности равномерного предела непрерывного отображения (доказанная в предыдущей лекции) в случае $h(y) = const$. также следует из теоремы 1.

Отображение $f : X \to Y$, где X, Y — метрические пространства, называется равномерно непрерывным, если $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$ равномерно по $a \in X$.

Пример 3. Отображение $f(x) = x^2$ непрерывно на $X = \mathbb{R}$, но не является равномерно непрерывным. Действительно, в случае $X = Y = \mathbb{R}$ условие равномерной непрерывности выглядит так: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Но $|x^2 - y^2| = |x-y| \cdot |x+y|$, и поэтому если x и y достаточно велики, то можно добиться произвольно большого значения $|x^2 - y^2|$ независимо от величины $|x-y|$.

Теорема 2. *Если пространство X — компакт, а отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то оно равномерно непрерывно.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого n существуют точки $a_n, b_n \in X$ такие, что $\varrho(a_n, b_n) < 1/n$, но $\varrho(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$. Поскольку X — компакт, множество $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет предельную точку x — то есть, существует подпоследовательность a_{n_k} последовательности a_n, сходящаяся к x при $k \to \infty$. Соответственно, $f(a_{n_k}) \to f(x)$. В силу неравенства $\varrho(a_{n_k}, b_{n_k}) < 1/n_k$ получаем, что $b_{n_k} \to x$ и $f(b_{n_k}) \to f(x)$. Следовательно, $\varrho(f(a_n), f(b_n)) \to 0$ при $k \to \infty$, что противоречит неравенству $\varrho(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$. $\square$

Теорема 3. *Для любой непрерывной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует.*

Доказательство. Проверим, что отображение из пополненного пространства разбиений отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{R}$, сопоставляющее каждому разбиению $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ его сумму Римана $I_a^b(f,\tau) = \sum_{k=0}^{N/2} f(x_{2k+1})(x_{2k+2} - x_{2k})$, фундаментально в точке ∞ ("идеальном разбиении с мелкостью 0"). По теореме 2 для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in [a,b]$, удовлетворяющих неравенству $|x-y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y) < \varepsilon/(2(b-a))|$. Пусть теперь τ_1, τ_2 — два разбиения с мелкостью, меньшей δ. Образуем разбиение τ, объединяя все точки, вошедшие в τ_1 и τ_2 (иногда такое разбиение обозначают $\tau_1 \cup \tau_2$ или $\max(\tau_1, \tau_2)$). Тогда, очевидно, $|I_a^b(f,\tau) - I_a^b(f,\tau_1)| < \varepsilon/2$, и то же самое верно для τ_2. Следовательно, $|I_a^b(f,\tau_1) - I_a^b(f,\tau_2)| < \varepsilon$, и фундаментальность установлена. Теперь существование интеграла следует из полноты $\mathbb{R}$. $\square$

Теорема 4. *Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a,b]$, то f непрерывна.*

Доказательство. Докажем непрерывность в точке $c \in [a,b]$. Поскольку предел $f'(c) = \lim_{x\to c}(f(x) - f(c))/(x-c)$ существует, выражение $R_c(x) = (f(x) - f(c))/(x-c)$ ограничено в некоторой окрестности U точки c: $m \le R_c(x) < M$. Тогда $|f(x) - f(c)| < \max(M,m)\,|x-c|$ и, следовательно, $f(x) \to f(c)$ при $x \to c$. □

Теорема 5. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ достигает в точке x_* локального максимума: $f(x_*) \ge f(x)$ для всякого x из некоторой окрестности U точки x_*. Тогда если $f'(x_*)$ существует, то $f'(x_*) = 0$.*

Доказательство. $(f(x) - f(x_*))/(x - x_*) \le 0$ при $x > x_*$ и ≥ 0 при $x < x_*$ (предполагается, что $x \in U$). Поэтому $f'(x_*) = \lim_{x\to x_*}(f(x) - f(x_*))/(x - x_*) = 0$, если существует. □

Аналогичный результат верен для точки локального минимума.

Следствие 1. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a,b]$. Тогда найдется точка $x_* \in [a,b]$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(x_*)(b-a)$.*

Доказательство. Функция $g(x) = (f(b)-f(a))x - f(x)(b-a)$ непрерывна по теореме 4. В силу компактности отрезка $[a,b]$ она достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Если $g(x) \ne const$ (а иначе теорема очевидна), то хотя бы одно из этих значений достигается во внутренней точке x_* отрезка $[a,b]$, которая тем самым является точкой локального максимума или минимума функции $g(x)$. По теореме 5 $g'(x_*) = 0$, что и означает требуемое равенство. □

Следствие 2 (следствия 1)**.** *Если $f'(x) = 0$ при всех $x \in [a,b]$, то $f(x) = const$.*

Лемма. *Если функция f интегрируема на отрезках $[a,b]$, $[b,c]$ и $[a,c]$, то $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.*

Доказательство. Пусть τ_n — последовательность разбиений отрезка $[a,c]$ с мелкостью, стремящейся к 0 и таких, что точка b является одной из точек разбиения. Поскольку $\int_a^c f(x)\,dx$ существует, он равен $\lim_{n\to\infty} I_a^c(f,\tau_n)$. Очевидно, $I_a^c(f,\tau_n) = I_a^b(f,\tau_n') + I_b^c(f,\tau_n'')$, где τ_n', τ_n'' — разбиения отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, полученные ограничением на эти отрезки разбиения τ_n. Но $\lim_{n\to\infty} I_a^b(f,\tau_n') = \int_a^b f(t)\,dt$, и аналогично для τ_n''. □

Теорема 6 (формула Ньютона–Лейбница)**.** *1) Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. 2) Если функция $f'(x)$ существует и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.*

Доказательство. Пусть $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда $(F(x+y) - F(x))/y = \frac{1}{y}\int_x^{x+y} f(t)\,dt$. Поэтому $\inf_{t\in[x,x+y]} f(t) \le (F(x+y) - F(x))/y \le \sup_{t\in[x,x+y]} f(t)$. В силу непрерывности f в точке x получаем, что $\lim_{y\to 0}\inf_{t\in[x,x+y]} f(t) = f(x)$, и то же самое верно для точной верхней грани.

Пусть теперь $g(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$. В силу пункта 1, $g'(x) = f'(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Отсюда следует (следствие 2), что $g(x) = f(x) + c$, где c — некоторая константа. Поскольку $g(a) = 0$, получаем $c = -f(a)$, и $\int_a^b f'(t)\,dt = g(b) = f(b) - f(a)$. □

Теорема 7 (принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, и $f : X \to X$ — отображение, для которого при некотором $q < 1$ и произвольных $a, b \in X$ выполнено неравенство $\varrho(f(a), f(b)) < q\varrho(a,b)$. Тогда отображение f имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность, заданную рекуррентным соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$. Эта последовательность фундаментальна: $\varrho(x_m, x_n) < \varrho(x_m, x_{m+1}) + \dots + \varrho(x_{n-1}, x_n) < (q^m + \dots + q^{n-1})\varrho(x_0, f(x_0))$. Поскольку $q < 1$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $m, n > N$ выполнено неравенство $q^m + \dots + q^{n-1} = \frac{q^m - q^n}{1-q} < \varepsilon/\varrho(x_0, f(x_0))$. Поскольку пространство X полно, последовательность x_n имеет предел x_*. Отображение f, очевидно, непрерывно, поэтому в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ можно перейти к пределу, получая $x_* = f(x_*)$ — существование неподвижной точки доказано. Единственность очевидна. □