ЛЕКЦИЯ 7

Abstract. Разрешимость дифференциального уравнения. Явные решения уравнений с разделяющимися переменными и линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теорема 1. *Пусть задано непрерывное отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и вектор $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, такие что отображение $F(t, x_1, \dots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки $(0, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ непрерывную производную по каждой переменной x_i. Тогда для некоторого числа $T > 0$ существует и единственна функция $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $f'(t) = F(t, f(t))$ и начальному условию $f(0) = v$.*

Доказательство. По условию теоремы существует такое число $R > 0$, что при $|x - v| < R$ производные функции F по всем переменным x_i существует и ограничена по модулю константой M. В метрическом пространстве $\mathcal{C} = (C[0, 1])^n$ рассмотрим замкнутый шар B радиуса R с центром в точке $v(t) \equiv v$. Пусть $f, g \in B$; рассмотрим функцию $s(t, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} F(t, (1 - \tau)f(t) + \tau g(t)) - F(t, f(t))$. Производная $\frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau}$ равна $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, (1-\tau)f(t)+\tau g(t))(g_i(t)-f_i(t))$ и не превосходит по модулю $nM \sum_{i=1}^n |g_i(t) - f_i(t)|$. Отсюда следует, что $|F(t, g(t)) - F(t, f(t))| = \left|\int_0^1 \frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau\right| \le nM \sum_{i=1}^n |g_i(t) - f_i(t)|$.

Рассмотрим отображение $A : B \to B$, заданное формулой $A(f)(x) = v + \int_0^x F(t, f(t))\, dt$. Решения дифференциального уравнения $f'(t) = F(t, f(t))$, удовлетворяющие начальному условию $f(0) = v$, суть неподвижные точки этого отображения. Шар B — полное метрическое пространство; докажем, что отображение A сжимающее. Действительно, при $f, g \in B$ имеем $\varrho(A(f), A(g)) = \max |A(f)(x) - A(g)(x)| \le Mnx \max t \in [0, x] |f(t) - g(t)|$, поэтому достаточно рассмотреть функции f и g на отрезке $[0, T]$, где $T < 1/Mn$. В силу теоремы о сжимающем отображении неподвижная точка существует и единственна. □

Следствие. *Пусть $F : \mathbb{R}^{nN+1} \to \mathbb{R}^n$ — отображение, а $v_0, \dots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^n$ — набор векторов, причем F имеет непрерывные производные по всем переменным, кроме, возможно, первой, в некоторой окрестности точки $(0, v_0, \dots, v_{N-1}) \in \mathbb{R}^{nN+1}$. Тогда для некоторого числа $T > 0$ существует и единственна функция $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $f^{(N)}(t) = F(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(N-1)}(t))$ для всех $t \in [0, T]$, причем $f(0) = v_0, \ \dots, \ f^{(N-1)}(0) = v_{N-1}$.*

Доказательство. Введем вспомогательные функции $f_1, \dots, f_{N-1}$ и заметим, что система уравнений $f' = f_1, f_1' = f_2, \dots, f_{N-1}' = F(t, f, f_1, \dots, f_{N-1})$ с начальными условиями $f(0) = v_0, \ \dots, \ f_{N-1}(0) = v_{N-1}$ эквивалентна исходной задаче. □

Предложение 1. *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, причем $g > 0$. Пусть $v \in \mathbb{R}$ и $\Phi(\tau) = \int_v^\tau dt/g(t)$. Тогда функция $y(x) = \Phi^{-1}(\int_0^x f(t)\, dt)$*

является решением дифференциального уравнения $y' = f(x)g(y)$ с начальным условием $y'(0) = v$.

Доказательство. Заметим, что обратная функция Φ^{-1} существует, так как функция Φ непрерывна и возрастает (по теореме Ньютона–Лейбница). По теореме о производной обратной функции имеем:$y'(x) = \frac{1}{\Phi'(y(x))} f(x) = f(x)g(y(x))$. Начальное условие, очевидно, выполнено. □

Лемма 1. *Ряд $\exp(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n/n!$ сходится равномерно по a в любом шаре $|a| \le R$.*

Доказательство. Поскольку $K^n = o(n!)$ при $n \to \infty$ и любом $K > 0$, имеем $|a^n/n!| < 1/2^n$ при достаточно больших n и произвольном a, $|a| \le R$. Тогда $\left|\sum_{n=p}^{q} a^n/n!\right| \le \sum_{n=p}^{q} 1/2^n$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ сходится (к 1), поэтому последовательность его частичных сумм удовлетворяет условию Коши. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда $\exp(a)$ удовлетворяет условию Коши равномерно в шаре. □

Лемма 2. *Для произвольного линейного оператора $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ существует положительная константа M такая, что $|Bv| \le M\,|v|$ для всех $v \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $S = \{w \in \mathbb{R}^n \mid |w| = 1\}$, а функция $f : S \to \mathbb{R}$ определяется формулой $f(w) = |Bw|$. Множество S — компакт (поскольку замкнуто и ограничено), а функция f — непрерывна. Следовательно, f ограничена: $f(w) \le M$ для некоторой константы M и всех $w \in S$. Пусть теперь $v \ne 0$ — произвольный вектор. Тогда $w \overset{\mathrm{def}}{=} v/\,|v| \in S$ и, следовательно, $|Bv| = |v|\;|Bw| \le M\,|v|$. □

Предложение 2. *Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Решением дифференциального уравнения $y' = Ay$ с начальным условием $y(0) = v$ является вектор-функция $y(t) = \exp(At)v$, где $\exp(B) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} B^k/k!$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\left|\sum_{k=p}^{q} A^k t^k v/k!\right| \le \sum_{k=p}^{q} M^k t^k\,|v|\,/k!$ для некоторой константы M. Из леммы 1 следует теперь, что ряд $\exp(At)$ удовлетворяет условию Коши равномерно по t на любом отрезке, откуда следует, что он сходится равномерно на любом отрезке. Теперь: $\frac{d}{dt}\exp(At)v = \lim_{\tau\to 0}(\exp(At+A\tau)-\exp(At))v/\tau = \lim_{\tau\to 0}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} A^k v((t+\tau)^k - t^k)/\tau = \lim_{N\to\infty}\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{N} A^k v((t+\tau)^k - t^k)/\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A^k v t^{k-1}/(k-1)! = A\exp(At)v$. □