ЛЕКЦИЯ 8

Abstract. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в интегральной форме.

Лемма 1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая в некоторой окрестности нуля производные до $n-1$-й включительно, а в нуле — также и n-ую производную. Пусть выполнены равенства $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. Тогда $f(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение следует из определения производной: если $f(0) = 0$ и $0 = f'(0) = \lim_{x\to 0}(f(x) - f(0))/x = \lim_{x\to 0} f(x)/x$, то $f(x) = o(x)$ по определению.

При произвольном n по формуле Лагранжа для всякого x существуют точки $\xi_1(x) \in [0, x]$, $\xi_2(x) \in [0, \xi_1(x)] \subset [0, x]$, ..., $\xi_{n-1}(x) \in [0, \xi_{n-2}(x)] \subset \dots \subset [0, x]$ такие, что $f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi_1(x))x = (f'(\xi_1(x)) - f'(0))x = f''(\xi_2(x))x^2 = \dots = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))x^{n-1}$. Поскольку при $n = 1$ утверждение доказано, $f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x)) = o(\xi_{n-1}(x)) = o(x)$ при $x \to 0$, откуда $f(x) = o(x)x^{n-1} = o(x^n)$. □

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая в точке 0 производные до n-го порядка включительно. Тогда асимптотическое равенство $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + o(x^n)$ при $x \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ при всех $k = 0, \dots, n$.*

Доказательство. Функция $g(x) = f(x) - (f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \dots + f^{(n)}(0)x^n/n!)$ удовлетворяет условиям леммы и поэтому есть $o(x^n)$ при $x \to 0$. С другой стороны, если $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + o(x^n)$ при $x \to 0$, то $(c_0 - f(0)) + (c_1 - f'(0))x + (c_2 - f''(0)/2)x^2 + \dots + (c_n - f^{(n)}(0)/n!)x^n = o(x^n)$ при $x \to 0$, откуда следует, что все коэффициенты равны нулю. □

Разумеется, вместо точки 0 можно использовать любую другую точку $a \in \mathbb{R}$ — разложение тогда будет по степеням $(x - a)^n$.

Пример 1. (все разложения при $x \to 0$)
$e^x = \sum_{k=0}^{n} x^k/k! + o(x^n)$ при всяком n;
$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)! + o(x^{2n+2})$ при всяком n;
$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)! + o(x^{2n+1})$ при всяком n;
$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k! + o(x^n)$ при всяком n и произвольном $\alpha \in \mathbb{R}$ (формула бинома Ньютона);
$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1) + o(x^{2n+2})$ при всяком n;

Пример 2. Для функции $\operatorname{tg} x$ мы не будем выписывать формулу Тейлора произвольного порядка (хотя это можно сделать с помощью т.наз. чисел Бернулли). Формулы примера 1 позволяют быстро найти разложение любого заданного порядка. Например (все разложения при $x \to 0$): $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x = (x - x^3/6 + o(x^4))/(1 - x^2/2 + o(x^3))$ (по формуле Тейлора порядка 3 для функций sin и cos) $= (x - x^3/6 + o(x^4))(1 + x^2/2 + o(x^4))$ (по формуле бинома Ньютона с показателем $\alpha = -1$) $= x + x^3/2 - x^3/6 + o(x^4) = x + x^3/3 + o(x^4)$. Отсюда, например, следует, что $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x)/(\operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to 0}(x^3/3 + o(x^4))/(-x^3/3 + o(x^4)) = -1$.

Пример 3. $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-1/x^2} = o(x^n)$ при всяком n, $x \to 0$. Это следует из того, что $e^t = o(1/t^n)$ при всяком n и $t \to -\infty$. Теорема 1 дает то же самое: доопределим функцию f нулем при $x = 0$. Тогда индукцией по n получим, что при произвольном n и при $x \neq 0$ имеется равенство $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-1/x^2}$, где P_n — дробно-рациональная функция, а $f^{(n)}(0) = 0$.

Лемма 2. *Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, и частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ непрерывна. Тогда сходимость $\frac{1}{\delta}(f(x + \delta, y) - f(x, y)) \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x, y)$ равномерна по y на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По теореме Лагранжа о промежуточной точке для всякого y существует число $\theta(y), 0 < \theta(y) < 1$ такое, что $\frac{1}{\delta}(f(x + \delta, y) - f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta(y)\delta, y)$. Функция $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ равномерно непрерывна на множестве $U \times K$, где U — малая окрестность точки x. Отсюда следует, что сходимость $\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta(y)\delta, y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ равномерная. □

Следствие. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Если частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны, то они совпадают.*

Доказательство. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma\delta}(f(x+\sigma, y+\delta) - f(x+\sigma, y) - f(x, y+\delta) + f(x,y))$. В силу равномерности сходимости (лемма 2) переходы к пределу можно переставить местами. □

Теорема 2 (многомерная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *имеет непрерывные частные производные до* m*-го порядка включительно. Тогда справедлива формула* $f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}(0) x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} + o(|x|^n)$.

Набросок доказательства. Применим теорему 1 к функции $g(t) = f(t, x_2, \dots, x_n)$. Полученное разложение равномерно по $x_2, \dots, x_n$, так что к его коэффициентам (имеющим вид $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^s}(0, x_2, \dots, x_n)$) можно опять применить теорему 1, и т.д. □

Теорема 3 (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.** *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет* $n{+}1$ *непрерывную производную на отрезке* $[0, x] \subset \mathbb{R}$. *Тогда* $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\,d\xi$.

Доказательство. $(n+1)$-кратное интегрирование по частям. □

Теорема видоизменяется очевидным образом в случае $x < 0$.

Лемма 3. *Пусть функции* $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывны и* $v(x) \geq 0$ *при всех* $x \in [a,b]$. *Тогда существует точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что* $\int_a^b u(x)v(x)\,dx = u(\xi)\int_a^b v(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $m = \inf_{[a,b]} u(x)$, $M = \sup_{[a,b]} u(x)$, тогда $m\int_a^b v(x)\,dx \leq \int_a^b u(x)v(x)\,dx \leq M\int_a^b v(x)\,dx$. Существование точки ξ следует теперь из теоремы о промежуточном значении для функции u. □

Следствие 1 (теоремы 3 — формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть функция* f *дифференцируема* $n+1$ *раз на отрезке* $[0,x]$. *Тогда найдется* $\xi \in [0,x]$ *такое, что* $|\xi| \leq |x|$ *и* $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$.

Доказательство. Применим к остаточному члену в теореме 3 формулу леммы 3 с $u(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$, $v(\xi) = (x-\xi)^n$. □

Пример 4. $e^x = \sum_{n=0}^\infty x^n/n!$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$, ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Действительно, пусть $x \in [-a,a]$. В силу следствия 1 найдется ξ, $|\xi| < a$ такое, что $R_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x - \sum_{n=0}^N x^n/n! = e^\xi x^{N+1}/(N+1)! < e^a a^{N+1}/(N+1)! \to 0$ при $N \to \infty$. Пусть теперь $x \in \mathbb{C}$ и $|x| \leq a$. Тогда ряд в правой части равенства абсолютно сходится (поскольку ряд для $e^{|x|}$ сходится), причем равномерно в круге $B_a = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq a\}$. По определению считают, что e^x при $x \in \mathbb{C}$ задается этим рядом.