ЛЕКЦИЯ 9

Abstract. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Примеры разложений в ряд Тейлора и их следствия. Правило Лопиталя.

Следствие 1 (последнего примера предыдущей лекции)**.** *Число e иррационально.*

Доказательство. Пусть $e = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Из формулы Лагранжа для остаточного члена видно, что $1/(n+1)! < e - 1 - 1 - 1/2! - \ldots - 1/n! < e/(n+1)!$. Отсюда следует, что $1/n < m(n-1)! - n! - n! - \ldots - 1 < 1$. Но интервал $(1/n, 1)$ не содержит целых чисел. □

Пример 1. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ и $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Ряды сходится равномерно в любом круге $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \le a\}$ (доказательство этих двух фактов такое же, как в последнем примере предыдущей лекции). При $x \in \mathbb{C}$ по определению считают, что $\sin x$ и $\cos x$ являются суммами соответствующих рядов. Следствие: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ при всех $x \in \mathbb{C}$, в частности, $e^{2\pi i k} = 1$ при $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Для последовательности $b_n \in \mathbb{R}$ символом $\limsup_{n\to\infty} b_n$ обозначается точная верхняя грань множества ее предельных точек.

Теорема 1. *Пусть задана последовательность $a_n \in \mathbb{C}$ и $\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ сходится абсолютно и равномерно по x в любом круге $B_R = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \le R\}$ радиуса $R < 1/\varrho$. При $|x| > 1/\varrho$ ряд расходится.*

Доказательство. Пусть $x \in B_R$, $R < 1/\varrho$. Тогда $|a_n| < \varrho^n$, откуда $|a_n x^n| < (R\varrho)^n$. Поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(R\varrho)^n$ сходится ($R\varrho < 1$), абсолютная равномерная сходимость исходного ряда следует из критерия Коши.

Пусть теперь $|x| > 1/\varrho$. Зафиксируем какое-нибудь число τ, $1/\varrho < \tau < |x|$. Существуют сколь угодно большие n такие, что $|a_n| > 1/\tau^n$ и, следовательно, $|a_n x^n| > 1$. В силу критерия Коши ряд расходится. □

Еще пример разложеня в ряд Тейлора:

Пример 2. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)/n!$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ и при всех $\alpha \in \mathbb{R}$; сходимость равномерная на любом отрезке $[-a, a]$ при $a < 1$. Здесь недостаточно формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа — нужен остаточный член в интегральной форме. Мы докажем формулу при $x > 0$; докажите ее при $x < 0$ самостоятельно. Остаточный член есть $R_n(x) = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\int_0^x (1+\xi)^{\alpha-n-1}(x-\xi)^n\, d\xi$. Очевидно, $(x-\xi)/(1+\xi) < x$ при $0 < \xi < x$. Пусть $b \in \mathbb{N}$ и $b > |\alpha|$, тогда $\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)/(n+1)! < (n+b)^b$. Отсюда вытекает, что $|R_n(x)| < (n+b)^b(1+a)^{\alpha-1}a^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Радиус круга сходимости в данном случае равен 1. Действительно, пусть сначала $\alpha < 0$. Меньше 1 радиус сходимости быть не может в силу доказанного выше факта, а больше тоже не может, поскольку при $x = -1$ ряд расходится. Пусть теперь $\alpha > 0$, но $\alpha - N < 0$ при каком-то $N \in \mathbb{N}$. Пусть $a_n(\alpha)$ — коэффициент рассматриваемого ряда для показателя α. Тогда $a_n(\alpha - N) = (\alpha - n)\ldots(\alpha - n - N + 1)a_n(\alpha)/(\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha - N + 1))$. Отсюда вытекает неравенство $|a_n(\alpha)/N^N| < |a_n(\alpha - N)| < |(n+N)^N a_n(\alpha)|$, из которого следует, что радиусы сходимости рядов с показателями α и $\alpha - N$ совпадают.

Пример 3. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n/n$ при всяком x, $|x| < 1$ и при $x = 1$. Радиус круга сходимости равен 1, поэтому ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-a, a]$ при $a < 1$. Доказательство аналогично примеру 2 и основано на равенстве $\ln'(1+x) = 1/(1+x)$.

Пример 4. $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$ при всяком x, $|x| < 1$ и при $x = 1$. Радиус круга сходимости равен 1, и поэтому ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-a, a]$ при $a < 1$. Доказательство основано на равенстве $\operatorname{arctg}' x = 1/(1+x^2)$ и аналогично примеру 2.

Следствие 2 (примера 3)**.** $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 + 1/4 - \ldots$

Доказательство. Формула получается подстановкой $x = 1$ в формулу примера 3. □

Следствие 3 (примера 4)**.** $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$

Доказательство. Формула получается подстановкой $x = 1$ в формулу примера 4. □

Пример 5. На предыдущей лекции было доказано, что ряд Тейлора функции e^{-1/x^2} нулевой, и поэтому сходится при любом x. Его сумма, однако, равна не e^{-1/x^2}, а нулю !

Лемма 1 (теорема Коши о промежуточной точке). *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b), непрерывны на отрезке $[a,b]$, и $g(a) \neq g(b)$. Тогда найдется точка $\xi \in [a,b]$, для которой $(f(a)-f(b))/(g(a)-g(b)) = f'(\xi)/g'(\xi)$.*

В случае $g(x) \equiv x$ получаем теорему Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим непрерывную функцию $h(x) = (g(b)-g(a))f(x)+(f(a)-f(b))g(x)$, и пусть она принимает свое наибольшее на отрезке $[a,b]$ значение в точке m_1, а наименьшее — в точке m_2. Поскольку $h(a) = h(b)(= g(b)f(a) - f(b)g(a))$, одна из точек m_1, m_2 принадлежит интервалу (a,b). Пусть это точка ξ. Тогда $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (f(a)-f(b))/(g(a)-g(b)) = f'(\xi)/g'(\xi)$. □

Теорема 2 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида 0/0). *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, а $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что f и g непрерывны в точке a и $f(a) = g(a) = 0$. Пусть последовательность $x_n \to a$. Тогда по лемме 1 найдется такая последовательность ξ_n, что $\xi_n \in [a, x_n]$ и $f(x_n)/g(x_n) = (f(x_n) - f(a))/(g(x_n) - g(a)) = f'(\xi_n)/g'(\xi_n)$. Тогда $\xi_n \to a$ и, следовательно, $f(x_n)/g(x_n) = f'(\xi_n)/g'(\xi_n) \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность x_n — произвольная, поэтому $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$. □

Пример 6. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x)/(\operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to 0} \frac{1/\cos^x - 1}{1/(1+x^2)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x/\cos^3 x}{-2x/(1+x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2\cos^4 x + 6\cos^2 x \sin^2 x)/(\cos^6 x)}{-(2(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2))/(1+x^2)^4} = -1$.