МК НМУ. Первый курс. Геометрия.
14 сентября 2001 г. Листок 2

1. Из Санкт-Петербурга (60° с.ш., 30° в.д.) в Магадан (60° с.ш., 150° в.д.) самолет летит по кратчайшему пути.

а) Сравните длину пути с $\pi R/3$, не находя её самой;

б) найдите координаты самой северной точки пути.

2. Существует ли отображение сферической области на плоскую область, при котором отрезки (сферических) прямых переходят в отрезки (плоских) прямых?

3. Докажите, что у сферического треугольника в одной точке пересекаются его а) биссектрисы; б) медианы; в) высоты.

4. Докажите теорему синусов для сферического треугольника (a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы):

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Две следующие задачи для тех, кто немного знает анализ.

5. Докажите, что при малых длинах сторон теоремы косинусов и синусов превращаются в соответствующие теоремы евклидовой геометрии.

6. В какую формулу переходит формула для площади сферического треугольника, когда его длины сторон малы?

Сдвигом вдоль прямой мы будем называть собственное движение, переводящее прямую в себя.

7. Докажите, что для любой пары точек на плоскости или на сфере существует единственный сдвиг вдоль прямой, их соединяющей, переводящий первую из двух точек во вторую. Какие движения являются сдвигами в каждом из этих случаев?

8. Какой вектор будет являться образом касательного вектора к сфере при композиции сдвигов вдоль сторон сферического треугольника? Рассмотрите сначала случай треугольника со всеми прямыми углами.

9. Найдите стороны и углы автополярного (полярного самому себе) треугольника.

10. Докажите, что для любого сферического треугольника $a + b + c < 2\pi$.

11. Дано несколько отрезков сферических прямых, сумма длин которых меньше π. Докажите, что найдётся сферическая прямая, не пересекающая ни одного из этих отрезков.