МК НМУ. Первый курс.
Геометрия. 21 сентября 2001 г. Листок 3

1. Приведите по три примера теорем евклидовой планиметрии, являющихся и не являющихся аффинными.

2. Докажите, что все трапеции с фиксированным отношением длин оснований аффинно эквивалентны.

3. Докажите, что любое аффинное преобразование представляется в виде композиции движения и двух растяжений относительно взаимно перпендикулярных осей.

4. Докажите, что любой четырёхугольник аффинным преобразованием можно перевести в четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями. Останется ли утверждение верным, если потребовать не только перпендикулярность, но и равенство диагоналей?

5. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные стороны шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

6. Пусть $ABCD$, $A'B'C'D'$ — выпуклые четырёхугольники. Докажите, что если

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{A'C'D'}} \text{ и } \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{S_{A'B'D'}}{S_{B'C'D'}},$$

то эти четырёхугольники аффинно эквивалентны.

7. а) Докажите, что для любых двух точек A, B на параболе $y = x^2$ найдётся аффинная симметрия этой параболы, переводящая A в B;

б) тот же вопрос для гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

8. а) Докажите, что любую пару точек на параболе можно перевести в любую другую пару аффинной симметрией параболы;

б) Верно ли то же самое для гиперболы?

9. (Теорема Гаусса.) $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. E — точка пересечения прямых AB и CD, F — точка пересечения прямых AD и BC. Докажите, что середины отрезков AC, BD и EF лежат на одной прямой.

10. Докажите, что множество точек, барицентрические координаты которых положительны, образуют внутренность базисного треугольника.