МК НМУ. Первый курс.
Геометрия. 28 сентября 2001 г. Листок 4

1. В каком случае дробно-линейное преобразование проективной прямой является взаимно-однозначным?

2. A, B, C, D — четыре различные точки на проективной прямой. Сколько разных чисел получится, если вычислять двойное отношение этих точек (выбирая их порядок всеми возможными способами)?

3. Существует ли проективное преобразование прямой f такое, что

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1?$$

4. Пусть a, b — неподвижные точки проективного преобразования прямой f, квадрат которого тождественен. Докажите, что $[a, b, x, f(x)] = -1$.

5. Укажите такое дробно-линейное преобразование f, что

$$f(0) \neq 0,\ f^2(0) \neq 0,\ f^3(0) \neq 0,\ f^4(0) = 0.$$

6. Нетождественное дробно-линейное преобразование $f(x)$ таково, что $f(a) \neq a$ и $f(f(a)) = a$. Докажите, что для любого $x \neq a, b$ $f(f(x)) = x$.

7. Пусть l_1, l_2 — прямые на плоскости, $f: l_1 \to l_2$ — дробно-линейное отображение прямой l_1 на l_2. Докажите, что f можно представить как композицию проецирований.

8. Пусть $x < a < b < y$ — точки на прямой. Докажите, что найдётся проективное преобразование прямой, которое сохраняет интервал (x, y) и переводит точку a в точку b.

9. Для пары точек a, b интервала (x, y) определим число $\rho(a, b) = |\ln[a, b, x, y]|$. Докажите, что а) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$; б) если c лежит между a и b, то $\rho(a, c) + \rho(c, b) = \rho(a, b)$.

10. Докажите, что любое дробно-линейное проективное преобразование представимо в виде суммы трёх инволютивных дробно-линейных преобразований.