МК НМУ. Первый курс. Геометрия. 5 октября 2001 г. Листок 5

1. Делит ли проективная прямая проективную плоскость на две части?

2. Существует ли проективное преобразование плоскости, сохраняющее окружность, но переводящее её внутренние точки во внешние?

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. Пусть однородные координаты точек A_1, B_1, C_1, M равны соответственно $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$. Найдите однородные координаты точек A, B, C.

4. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. Пусть прямая AA_1 пересекает прямую B_1C_1 в точке A_2. Докажите, что $[A, M, A_2, A_1] = -1$.

5. Докажите, что множество точек, двойственных касательным к конике, образует конику.

6. Дана окружность и точка O внутри неё. Найдите геометрическое место точек X таких, что $[A, B, O, X] = -1$, где A, B — точки пересечения прямой OX с окружностью.

7. Дана окружность и точка O, ей не принадлежащая. Каждой точке окружности X сопоставим точку X' — вторую точку пересечения прямой OX и окружности. Найдите проективное преобразование φ такое, что для всех точек окружности $\varphi(X) = X'$.

8. Придумайте проективное доказательство теоремы о бабочке, которая звучит так. Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB некоторой окружности. Тогда прямые KN и ML пересекают прямую AB в точках, равноудалённых от точки O.