МК НМУ. Первый курс. Геометрия.
26 октября 2001 г. Листок 8.

1. Доказать, что при дробно-линейном преобразовании комплексной плоскости прямая или окружность переходит в прямую или окружность.

2. Доказать, что дробно-линейные преобразования сохраняют углы.

3. а) Доказать, что точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$

б) Доказать, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной прямой или окружность тогда и только тогда, когда $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$

4. а) Доказать, что стереографическая проекция представляет собой ограничение на сферу инверсии в пространстве.

б) Доказать, что стереографическая проекция переводит окружности на сфере в окружности или прямые на плоскости и сохраняет углы.

в) Доказать, что стереографическая проекция сохраняет двойное отношение.

5. Доказать формулу

$$\operatorname{ch} \rho(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)}$$

прямыми вычислениями.

6. Доказать, что гиперболическая окружность в модели Пуанкаре является евклидовой окружностью (с другим центром).

7. Приведите пример дробно-линейного преобразования, переводящего единичный круг в верхнюю полуплоскость.

8. Приведите пример дробно-линейного преобразования, переводящего заданную точку a в центр единичного круга и сохраняющего его границу.

9. Существуют ли три попарно ортогональные окружности? А четыре?

10. Есть 10 окружностей, которые касаются друг друга в одной точке. Конечно или бесконечно количество дробно-линейных преобразований, сохраняющих эти окружности?