**МК НМУ. Первый курс. Экзамен по геометрии. 16 декабря 2001 г.**

**1.** На сфере проведены две равные дуги большого круга $AB$ и $CD$. Докажите, что найдётся такая точка $M$, что сферические треугольники $MAB$ и $MCD$ равны.

**2.** На проективной плоскости прямые $AM$ и $BC$ пересекаются в точке $A_1$, прямые $BM$ и $AC$ — в точке $B_1$, прямые $CM$ и $AB$ — в точке $C_1$, а прямые $A_1B_1$ и $AB$ — в точке $X$. Докажите, что $[A, B, C_1, X] = -1$.

**3.** Пусть $f$ и $g$ — проективные преобразования, оставляющие неподвижными точку $A$ и каждую точку прямой $\ell$, не проходящей через $A$. Докажите, что $fg = gf$.

**4.** Назовём оритреугольником фигуру на плоскости Лобачевского, ограниченную тремя дугами попарно касающихся орициклов.

а) Докажите, что все оритреугольники равны.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в оритреугольник.

**5.** Все углы шестиугольника на плоскости Лобачевского равны, длины противоположных сторон также равны. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

**6.** Движение плоскости Лобачевского является композицией трёх симметрий относительно последовательных сторон треугольника с вершинами на абсолюте. Сколько неподвижных точек имеют это движение и его ограничение на абсолют?

**7.** Докажите, что к двум скрещивающимся прямым в пространстве Лобачевского существует ровно один общий перпендикуляр.