МК НМУ. Первый курс. Экзамен по геометрии. 24 февраля 2002 г.

1. Диагонали сферического четырехугольника $ABCD$ равны d_1 и d_2, пересекаются в точке O под углом α и делятся точкой O пополам. Найдите расстояния между точкой O и точками пересечения сферических прямых AB и CD.

2. Пусть аффинное преобразование переводит конечное множество точек в себя (это значит, что каждая точка множества переходит в какую-то точку этого же множества). Докажите, что оно имеет неподвижную точку.

3. Точки A, B и C евклидовой плоскости лежат на прямой ℓ. На отрезках AB, AC и BC как на диаметрах построены окружности. Окружность ω касается всех трёх построенных окружностей. Докажите, что диаметр окружности ω равен расстоянию от её центра до прямой ℓ.

4. Проективное преобразование плоскости переводит вершины квадрата $ABCD$ в себя следующим образом: $A \mapsto A$, $B \mapsto C$, $C \mapsto D$, $D \mapsto B$. Существует ли прямая, переходящая в себя при этом преобразовании?

5. Докажите, что все описанные четырёхугольники с вершинами на абсолюте плоскости Лобачевского равны.

6. Докажите, что прямоугольный шестиугольник на плоскости Лобачевского однозначно задаётся длинами тройки попарно несмежных сторон (т. е., что для любой тройки положительных чисел шестиугольник с соответствующими длинами сторон существует и единствен).

7. Можно ли восстановить собственное движение плоскости Лобачевского, если известна композиция этого движения и ортогональной проекции на некоторую прямую?

8. Пусть ограничение на абсолют собственного движения трёхмерного пространства Лобачевского имеет одну неподвижную точку. Докажите, что оно не имеет неподвижных точек в пространстве Лобачевского.