Высший Колледж Математики

Инварианты графов и узлов. Лекция 1. Хроматический многочлен

1 Графы, изоморфизм и инварианты

Графы, узлы и зацепления — простейшие топологические объекты. Их простота определяется тем, что их топологическая размерность 1 — первая содержательная размерность. Однако уже в этом случае природа изучаемых объектов чрезвычайно богата и содержательна.

Мы начнем с изучения графов. Граф — это (конечный) набор *вершин*, некоторые из которых попарно соединены *ребрами*. Позже мы вернемся к этому определению, но пока его достаточно. Согласно нему граф Γ это пара $\Gamma = (V, E)$, где $V = V(\Gamma)$ это множество вершин, а $E = E(\Gamma) \subset V \times V$ это множество ребер. *Степень* (или *валентность*) вершины — это число концов ребер, входящих в эту вершину. Мы будем считать два графа $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ одинаковыми (точнее, *изоморфными*), если существует взаимнооднозначное отображение $V_1 \to V_2$ множества вершин первого графа в множество вершин второго графа, переводящее множество ребер первого графа взаимно-однозначно в множество ребер второго графа.

Графы — чрезвычайно универсальный способ представления самых разнообразных данных. Эта всеобщность означает, что невозможно создать теорию графов: такая теория должна была бы охватывать множество далеких друг от друга областей. Однако если не задаваться столь всеобъемлющей задачей, то графовое представление может оказаться весьма удобным языком описания объектов какой-нибудь алгебраической или топологической теории и формулировки ее результатов, а также полезным источником для обнаружения связей между различными теориями.

Нас будут интересовать *инварианты* графов, т.е. функции на графах, принимающие одинаковые значения на изоморфных графах. Вообще, придумать инвариант несложно — годится любая функция, выраженная в терминах, не использующих конкретные множества вершин и ребер. Вот примеры таких функций:

- число вершин и число ребер в графе;
- максимальная степень вершины;
- максимальное расстояние между вершинами графа;
- ранг матрицы примыканий графа;

и т.д. (*Матрица примыканий* графа строится следующим образом. Занумеруем все n вершин графа числами от 1 до n. Матрица примыканий — это $n \times n$-матрица, у которой в клетке (i, j) стоит 1, если вершины i и j соединены ребром, и 0 — в противном случае. На диагонали в матрице примыканий стоят нули. Это очень полезный способ представления графа. Ясно, что ранг матрицы примыканий — рассматриваемой как матрица с элементами из $\mathbf{Z}_2$ — является инвариантом графа.) Вы можете поупражняться в придумывании своих собственных инвариантов.

Поскольку придумать инвариант графов несложно, встает вопрос: как сравнивать инварианты? Какие из них лучше, какие хуже? На этот вопрос нельзя ответить, если

А. 1: Две различные раскраски двухточечного графа без ребер

не знать, зачем инварианты нужны. Первый — и самый очевидный — ответ на последний вопрос состоит в том, что инварианты — удобный способ различать графы. Если один и тот же инвариант принимает разные значения на двух графах, то эти графы неизоморфны. Вообще, проблема изоморфизма графов — сложная с вычислительной точки зрения задача. Разумеется, изоморфизм двух графов можно проверить, отождествляя попарно всеми возможными способами вершины этих графов, однако этот алгоритм суперэкспоненциален по числу вершин. Алгоритмы, обеспечивающие полиномиальную сложность в наихудшем случае, неизвестны. Такая постановка вопроса приводит к следующим естественным требованиям к инварианту:

- инвариант должен быть легко вычислимым (скажем, за полиномиальное по числу вершин время);
- инвариант должен различать как можно больше неизоморфных графов;

и соответствующим "критериям качества": один инвариант лучше другого, если он

- быстрее вычисляется;
- различает больше графов.

К сожалению, первое требование трудно выполнимо. Второе же допускает дальнейшую формализацию, и мы не раз к нему вернемся.

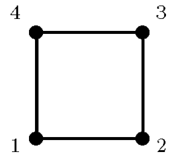
2 Хроматический многочлен

Рассмотрим теперь важный и нетривиальный пример инварианта. Пусть c — натуральное число. Обозначим через $\chi_\Gamma(c)$ число правильных раскрасок вершин графа Γ в c цветов. Это функция от переменной c, и мы будем называть ее *хроматической функцией* графа Γ. Под *правильной раскраской* мы понимаем сопоставление цвета каждой вершине графа таким образом, что любые две соседние (т.е. соединенные ребром) вершины окрашены в различные цвета.

Например, вершины графа допускают правильную раскраску в один цвет ($c = 1$) в том и только в том случае, если в графе нет ребер, т.е. он состоит из n не связанных между собою вершин. Заметим, что в этом случае мы можем красить каждую вершину произвольно в любой из c цветов — раскраска все равно будет правильной, а значит, $\chi_\Gamma(c) = c^n$. Обратите внимание на то, что две раскраски вершин двухточечного графа, изображенные на рис. 1, мы считаем *различными*. Другими словами, зафиксировав граф Γ, мы помечаем его вершины и считаем различными любые две раскраски, в которых одна и та же вершина окрашена в различные цвета.

Для графа из двух вершин, соединенных ребром, имеем $\chi_\Gamma(c) = c(c-1)$. Действительно, если мы окрасим первую вершину в один из c цветов, то для окраски

А. 2: Граф-цепочка A_n



А. 3: Граф C_4 с занумерованными вершинами

второй вершины мы можем использовать один из оставшихся $c-1$ цвета. Аналогично, для графа-треугольника (трех вершин, попарно соединенных ребрами) $\chi_\Gamma(c) = c(c-1)(c-2)$.

Ю 2.1 1) Найдите $\chi_{K_n}(c)$, где K_n — полный граф на n вершинах, т.е. граф, в котором все вершины соединены ребрами попарно.

2) Найдите $\chi_{A_n}(c)$, где A_n — цепочка на n вершинах (см. рис. 2).

Прежде, чем переходить к общему анализу функции $\chi_\Gamma(c)$, заметим, что если граф Γ представляется в виде несвязного объединения двух графов $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$, то $\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma_1}(c)\chi_{\Gamma_2}(c)$. Это очень важное свойство, и мы остановимся на нем подробнее.

Путем в графе Γ называется последовательность его вершин, в которой любые две последовательные вершины соединены ребром. Первая и последняя вершина пути называются его *концами*. Граф называется *связным*, если для любой пары его вершин существует путь, концами которого они являются. Любой граф Γ разбивается на *компоненты связности* — такие связные подграфы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ с попарно непересекающимися множествами вершин и ребер, что $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \sqcup \dots \sqcup V(\Gamma_k)$ и $E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \sqcup \dots \sqcup E(\Gamma_k)$. *Несвязное объединение* двух графов — это граф, множество вершин и множество ребер которого являются несвязным объединением множеств вершин и ребер этих графов. Множество компонент связности несвязного объединения двух графов является несвязным объединением множеств их компонент связности. То, что хроматическая функция несвязного объединения двух графов является произведением хроматических функций этих графов, очевидно: правильная раскраска каждого из графов автоматически дает правильную раскраску их объединения. В дальнейшем нас очень часто будут интересовать именно такие инварианты графов, значения которых на несвязных объединениях графов равны произведению значений на каждом из объединяемых графов. Заметим, что значение такого инварианта на *пустом* графе следует полагать равным 1.

Вычислим теперь хроматическую функцию для несколько менее тривиального примера — циклического графа C_n (n-угольника). Начнем с графа C_4 (квадрата). Занумеруем его вершины в циклическом порядке (см. рис. 3) и будем раскрашивать их последовательно. Первую вершину можно раскрасить в c цветов. Вторую — в $c-1$ цвет. Третью — тоже в $c-1$ цвет: ее цвет должен отличаться от цвета второй вершины. С четвертой вершиной дело обстоит сложнее. Ее цвет должен отличаться и от цвета третьей, и от цвета первой вершины. Разделим всевозможные окраски четвертой вершины в цвет, отличный от цвета третьей вершины, на две группы: те, в которых цвет четвертой вершины отличен от цвета первой, и те, в которых эти два цвета совпадают. Первая группа дает правильные раскраски квадрата, а вторая — правильные раскраски треугольника. Действительно, если первая и четвертая вершина покрашены в один и тот же цвет, то мы можем склеить их в одну, получив из квадрата треугольник. Тем самым, мы доказали равенство

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{C_3}(c).$$

Здесь A_4 —цепочка на четырех вершинах, а $C_3 = K_3$ — треугольник.

Ю 2.2 1) Воспользовавшись упражнением 2.1, подсчитайте $\chi_{C_4}(c)$.
2) Рассуждая по индукции, найдите $\chi_{C_n}(c)$ для произвольного n.

На самом деле, в приведенном рассуждении нигде не использовалась структура цикла. Оно годится для произвольного графа. Пусть Γ — граф, $e \in E(\Gamma)$ — ребро в нем. Обозначим через Γ'_e граф Γ с выкинутым ребром e, а через Γ''_e — этот же граф, в котором ребро e стянуто в точку (и, следовательно, два конца ребра e стали новой вершиной нового графа, а число вершин в нем на 1 меньше, чем в Γ). Тогда справедливо следующее утверждение.

Ю 2.3 *Хроматическая функция удовлетворяет равенству*

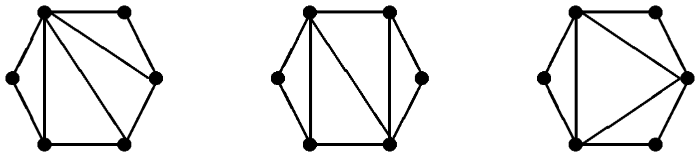
$$\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma'_e}(c) - \chi_{\Gamma''_e}(c) \tag{1}$$

для любого графа Γ *и любого ребра* e *в нем.*

Тем самым, хроматическую функцию графа можно вычислять последовательно: оба графа в правой части равенства (1) устроены проще, чем граф в его левой части. У первого из них меньше ребер, а у второго — меньше и вершин, и ребер. Заметим, однако, что сложность такого вычисления экспоненциальна: на каждом шаге мы получаем два графа вместо одного. Важно также отметить, что — несмотря на свободу выбора ребра на каждом шаге — результат вычисления, в силу инвариантности хроматической функции, не зависит от выбираемых ребер.

Г 2.4 Хроматическую функцию можно определить также и для графов, содержащих петли и кратные ребра. При этом для графа с петлями она оказывается тождественно равной нулю (поскольку у таких графов правильные раскраски вершин отсутствуют). Хроматическая функция графа с кратными ребрами совпадает с хроматической функцией того же графа, в котором каждое кратное ребро заменено обычным однократным ребром. Такое определение согласуется с теоремой (2.3). Действительно, если в графе есть кратные ребра, то, выбирая любое из этих ребер в качестве ребра e и применяя к нему формулу (1), мы получаем в правой части формулы тот же граф, в котором кратность ребра уменьшилась на 1, а также граф с петлей, хроматическая функция для которого равна нулю.

Ю 2.5 Пользуясь теоремой 2.3, подсчитайте значения хроматической функции для а) деревьев на n вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены "попарно



А. 4: Различные триангуляции цикла C_6

непересекающиеся диагонали", разбивающие их на треугольники, см. рис. 4. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

Во всех просчитанных нами примерах хроматическая функция оказывается многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1. Теорема 2.3 позволяет распространить это утверждение на произвольные графы.

АБ 2.6 *Хроматическая функция любого графа является многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен* 1.

Ю 2.7 Чему равен второй коэффициент хроматического многочлена?

3 О топологии графа

Граф — одномерный объект, поэтому его топология довольно проста. Однако она не совсем пуста. Разумеется, в первую очередь интерес представляет топология связных графов. Связный граф может иметь циклические пути. *Циклическим путем* в графе называется замкнутый путь (т.е., путь с общим началом и концом). Циклический путь называется *простым*, если он не проходит дважды через одно и то же ребро. Связный граф без простых циклических путей называется *деревом*. Набор циклических путей с общим началом называется *независимым*, если он независим как набор циклов топологического пространства. Максимальное количество циклических путей в независимом наборе циклических путей называется *первым числом Бетти*, или *цикломатическим числом* графа, и обозначается через $b_1(\Gamma)$. Ученым языком, это число равно числу образующих в первой группе гомологий графа. Число компонент связности в графе называют также *нулевым числом Бетти*; оно обозначается через $b_0(\Gamma)$. Это — число образующих нулевой группы гомологий.

Ю 3.1 Подсчитайте первое число Бетти а) для деревьев; б) для циклов C_n; в) для полных графов K_n; г) для триангуляций.

Ю 3.2 (Эйлер) *Первое число Бетти связного графа равно*

$$b_1(\Gamma) = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1.$$

Это утверждение легко доказывается по индукции. Его можно считать определением цикломатического числа. Первое число Бетти графа, очевидно, является инвариантом графа.

Ориентацией графа называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер.

Ю 3.3 (Р. Стенли) Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно значению $|\chi_\Gamma(-1)|$ модуля хроматического многочлена в точке -1. Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями.

Например, для графа $A_2 = K_2$ имеем $\chi_{A_2}(-1) = 2$, и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь, $\chi_{K_3}(-1) = -6$, и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими.

4 Многочлен Пенроуза

Вот еще один, по-видимому, чрезвычайно важный, инвариант графов. Нас будут интересовать подмножества в множестве $E(\Gamma)$ всех ребер графа Γ. Такое подмножество можно считать вектором в векторном пространстве над полем $\mathbf{Z}_2$, порожденном этими ребрами, т.е. в векторном пространстве $\mathbf{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$. Координата этого вектора, соответствующая ребру e, равна нулю, если ребро e не входит в подмножество, и равна 1 в противном случае.

Набор ребер в графе Γ называется *эйлеровым подграфом* (или *циклом*), если валентность всех вершин этого подграфа четна. Например, в треугольнике C_3 есть два цикла: пустой набор ребер и набор, состоящий из всех трех ребер. Множество $\mathcal{C}(\Gamma)$ всех циклов в графе Γ образует векторное подпространство в пространстве $\mathbf{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$. Если множество $V(\Gamma)$ вершин графа Γ разбито на два непересекающихся подмножества $V(\Gamma) = V_1 \sqcup V_2$, то подмножество всех ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2, называется *коциклом* в Γ. В C_3 коциклы — это пустое подмножество ребер, а также все пары ребер. Множество всех коциклов $\mathcal{K}(\Gamma)$ также образует векторное подпространство в пространстве $\mathbf{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$.

В пространстве $\mathbf{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$ есть скалярное произведение со значениями в $\mathbf{Z}_2$: скалярное произведение двух наборов ребер равно четности числа элементов в пересечении этих наборов.

Ю 4.1 (Veblen, 1912) *Подпространства $\mathcal{C}(\Gamma)$ и $\mathcal{K}(\Gamma)$ взаимно ортогональны относительно этого скалярного произведения:*

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{K}^\perp(\Gamma), \qquad \mathcal{C}^\perp(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma).$$

В частности, размерности этих пространств взаимно дополнительны: их сумма равна числу ребер в графе. Отсюда и из формулы Эйлера вытекает, что размерность пространства коциклов равна $|V(\Gamma)| - 1$. Например, как мы видели, размерность пространства циклов в C_3 равна 1, а размерность пространства коциклов равна 2. Сумма этих размерностей равна 3 — числу ребер в C_3.

Для подмножества $E' \subset E(\Gamma)$ множества ребер в Γ рассмотрим подпространство

$$B_\Gamma(E') = \{\mathcal{C} \in \mathcal{C}(\Gamma), \mathcal{C} \cap E' \in \mathcal{K}(\Gamma)\} \subset 2^{|E(\Gamma)|}.$$

Многочленом Пенроуза графа Γ называется многочлен от одной переменной λ

$$P_\Gamma(\lambda) = \lambda \sum_{E' \subset E(\Gamma)} (-1)^{|E'|} \lambda^{\dim B_\Gamma(E')}.$$

Ю 4.2 1) Вычислите многочлен Пенроуза для графа C_3 и для других графов с не более, чем 4 вершинами.

2) Докажите, что если в связном графе есть *перешеек* (ребро, при выкидывании которого граф становится несвязным), то многочлен Пенроуза такого графа равен нулю.