Высший Колледж Математики

Инварианты графов и узлов. Лекция 3. Статистические модели инвариантов графов

1 Спинорные модели

Статистические модели инвариантов графов основаны на введении дополнительной структуры на графе — его "состояния", задании некоторой функции для каждого состояния и последующего усреднения этой функции по всем возможным состояниям. *Спинорная модель* задается конечным множеством C цветов (которое можно считать просто множеством натуральных чисел $\{1,\dots,c\}$) и отображением $w : C\times C\to K$ из квадрата этого множества в кольцо K. *Состояние* модели на графе Γ это присвоение цвета каждой вершине графа, т.е. отображение $\sigma : V(\Gamma)\to C$. Значение статистического инварианта, определяемого по такой модели, на графе Γ равно

$$Z(\Gamma)=\sum_{\sigma}\prod_{\{A,B\}\in E(\Gamma)} w(\sigma(A),\sigma(B)). \qquad (1)$$

Здесь суммирование идет по всем состояниям графа, а произведение берется по всем ребрам графа Γ. Очевидно, что значение такой функции на графе является инвариантом графа.

Пример 1.1 (Число вершин, ребер и компонент связности) 1) Статистическую природу имеют число вершин и число ребер в графе. Если мы положим $w(s,t)=\alpha$ для всех $s,t\in C$, то для любого графа Γ

$$Z(\Gamma)=c^{|V(\Gamma)|}\alpha^{|E(\Gamma)|}.$$

Если положить $\alpha=1$, то мы выделим число вершин в графе, а если взять один цвет, то — число ребер.

2) Число компонент связности графа тоже имеет статистическую природу. Положим $w(s,s)=\alpha$ и $w(s,t)=0$, если $s\neq t$. Тогда для любого графа Γ

$$Z(\Gamma)=c^{b_0(\Gamma)}\alpha^{|E(\Gamma)|},$$

где $b_0(\Gamma)$ — число компонент связности в Γ.

Пример 1.2 (Хроматический многочлен) Статистическая модель для хроматического многочлена получается, если положить $w(s,t)=0$, если $s=t$, и $w(s,t)=1$ при $s\neq t$. Состояние $\sigma : V(\Gamma)\to C$ дает ненулевой вклад в (1) в том и только в том случае, если оно задает правильную раскраску графа.

Пример 1.3 (Модели Изинга и Поттса) Рассмотренные выше статистические модели являются частными случаями модели $M_{\alpha,\beta}$. Такая модель определяется парой элементов $\alpha,\beta\in K$ кольца K: мы полагаем $w(s,s)=\alpha$ и $w(s,t)=\beta$ при $s\neq t$. Модель $M_{\alpha,\beta}$ превращается в *модель Поттса* P_α, если $K=\mathbf{C}$, $\alpha\neq 0$ и $\beta=\alpha^{-1}$. *Модель*

Изинга I_α представляет собой модель Поттса, в которой $c=2$, т.е. используется всего две краски.

Например, значение модели $M_{\alpha,\beta}$ на графе-отрезке K_2 равно

$$M_{\alpha,\beta}(K_2) = c\alpha + c(c-1)\beta,$$

что дает значение модели Поттса

$$P_\alpha(K_2) = c\alpha + \frac{c(c-1)}{\alpha}$$

и модели Изинга

$$I_\alpha(K_2) = 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1.4 *Модель* $M_{\alpha,\beta}$ *удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению, обобщающему соотношение Татта:*

$$M_{\alpha,\beta}(\Gamma) = \beta M_{\alpha,\beta}(\Gamma'_e) + (\alpha-\beta)M_{\alpha,\beta}(\Gamma''_e)$$

для любого графа Γ *и любого звена* e *в нем.*

Вот короткое объяснение происхождения модели Изинга. Она обслуживает модель кристалла в статистической физике. В такой модели граф Γ представляет кристаллическую решетку. Ее вершины — атомы — могут находиться в одном из двух состояний, и в зависимости от того, находятся ли соседние вершины в одном состоянии или в разных, ребру, их соединяющему, приписывается некоторая энергия $-L$ или $+L$ для некоторой положительной постоянной L. Если состояние $\sigma(A)$ каждого атома решетки фиксировано, то полная энергия кристалла равна

$$E(\Gamma,\sigma) = -L\sum_{\{A,B\}\in E(\Gamma)} \varepsilon(\sigma(A),\sigma(B)),$$

где $\varepsilon(c_1,c_2)$ равно $+1$, если $c_1=c_2$ и -1 в противном случае. В классической статистической модели кристалл при температуре T находится в состоянии σ с вероятностью, пропорциональной $\exp(-(1/kT)E(\Gamma,\sigma))$, где k — постоянная Больцмана. Другими словами, эта вероятность пропорциональна

$$\exp\left(\frac{L}{kT}\sum_{\{A,B\}\in E(\Gamma)}\varepsilon(\sigma(A),\sigma(B))\right) = \prod_{\{A,B\}\in E(\Gamma)}\exp\left(\frac{L}{kT}\varepsilon(\sigma(A),\sigma(B))\right).$$

Если теперь положить $\alpha=\exp(L/kT)$ и $w(s,t)=\alpha$ при $s=t$ и $w(s,t)=\alpha^{-1}$ при $s\neq t$, то мы придем в точности к модели Изинга.

2 Вертексные модели

В отличие от спинорных моделей, в вертексных моделях происходит окраска ребер, а не вершин. *Вертексная модель* представляет собой набор цветов C и последовательность симметрических функций $w_k : C^k \to K$ из k-х степеней этого набора в коммутативное кольцо K. *Состоянием* модели на графе Γ называется отображение $\tau : E(\Gamma) \to K$ из множества ребер графа Γ в множество красок. Значение статистического инварианта, определяемого по такой модели, равно

$$\sum_{\tau:E(\Gamma)\to C} \prod_{A\in V(\Gamma)} w_{v(A)}(\tau(e_1^A), \dots, \tau(e_{v(A)}^A)).$$

Здесь A пробегает все вершины графа Γ, через $v(A)$ обозначена валентность вершины A, а $e_1^A, \dots, e_{v(A)}^A$ — ребра, инцидентные вершине A, пронумерованные в произвольном порядке.

Пример 2.1 (валентности вершин) Положив $w_k(c_1, \dots, c_k) = s_k$ мы получаем следующее значение вертексной модели на произвольном графе Γ:

$$c^{|E(\Gamma)|} s_0^{n_0(\Gamma)} s_1^{n_1(\Gamma)} s_2^{n_2(\Gamma)} \dots,$$

где через $n_i(\Gamma)$ обозначено число вершин валентности i в Γ.

Пример 2.2 (реберные раскраски) Если положить $w_k(c_1, \dots, c_k)$ равным 1, если все значения $c_1, \dots, c_k$ различны, и нулю в противном случае, то соответствующая статистическая модель будет подсчитывать *правильные реберные раскраски* графов, т.е. такие раскраски ребер, при которых в любую вершину не входят ребра одного цвета. Заметим, что число таких раскрасок равно нулю, если в графе есть хотя бы одна петля.

Пример 2.3 (потоковый многочлен) Вертексную модель легко модифицировать так, чтобы она применялась к ориентированным графам. Для этого нужно вместо симметрических функций $w_k : C^k \to K$ рассмотреть веса вида

$$w_{k,l} : C^k \times C^l \to K,$$

симметричные отдельно по каждой группе переменных. Значение статистического инварианта такой модели на ориентированном графе Γ определяется формулой

$$\sum_{\tau:E(\Gamma)\to C} \prod_{A\in V(\Gamma)} w_{k,l}(\tau(a_1^{A-}), \dots, \tau(a_{k(A)}^{A-}), \tau(a_1^{A+}), \dots, \tau(a_{l(A)}^{A+})),$$

где $k(A)$ (соотв., $l(A)$) — число ребер, выходящих из вершины A (соотв., входящих в нее), а a_i^{A-} (соотв., a_j^{A+}) пробегает ребра, выходящие из вершины A (соотв., входящие в нее).

Пусть теперь C — коммутативное кольцо, состоящее из $c = \lambda$ элементов. Положив, $w_{k,l}(c_1^-, \dots, c_k^-, c_1^+, \dots, c_l^+) = 1$, если все c_i^-, c_j^+ отличны от нуля и $c_1^- + \dots + c_k^- = c_1^+ + \dots + c_l^+$, и нулю в противном случае, мы превращаем соответствующий статистический инвариант вертексной модели в потоковый многочлен.