Высший Колледж Математики

Инварианты графов и узлов. Лекции 6 и 7. Инварианты узлов и зацеплений

1 Два способа описания инвариантов узлов и зацеплений

Узел в трехмерной сфере — это гладкое (т.е. бесконечно дифференцируемое) невырожденное отображение $k : S^1 \to S^3$, рассматриваемое с точностью до изотопической эквивалентности в образе. Невырожденность означает, что касательный вектор k' нигде не обращается в нуль. *Инвариант* узлов — это функция на узлах, т.е. функция, значения которой зависят лишь от изотопического типа узла. В дальнейшем мы будем часто говорить об узле, подразумевая образ отображения k, однако следует иметь в виду, что подобная неаккуратность вовсе не всегда продуктивна и безопасна.

Мы будем считать, что на единичной окружности выбрана ориентация, которая задает ориентацию узла, и на сфере S^3 также зафиксирована ориентация. Разумеется, существуют инварианты, значения которых не зависят от выбранной ориентации, и мы будем стараться оговаривать это свойство. Мы будем говорить об инвариантах со значениями в данном кольце K, и не будем рассматривать инвариантов других типов (скажем, фундаментальную группу дополнения к узлу). Кроме обычных нам могут понадобиться *оснащенные* узлы, т.е. узлы с фиксированным нормальным полем вдоль них.

Для узлов определена операция *композиции*. Представитель композиции $k_1 k_2$ строится из представителей узлов k_1, k_2 (отделенных друг от друга, скажем, диаметральной сферой) путем их склейки с сохранением ориентации. Узел называется *простым*, если он не представляется в виде композиции двух нетривиальных узлов.

Зацепление — совокупность из нескольких попарно не пересекающихся узлов. Каждый из этих узлов называется *компонентой* зацепления. Узел представляет собой частный случай зацепления. Сформулированные выше предположения об узлах мы будем считать выполняющимися и для зацеплений. Можно рассматривать узлы и зацепления в трехмерных многообразиях, отличных от сферы, однако мы на этом останавливаться не будем.

Есть два принципиально различных способа описывать инварианты узлов и зацеплений. Первый состоит в том, чтобы указать значение инварианта на каждом зацеплении. Для этого необходимо иметь какой-либо способ представления зацепления, пригодный, например, для кодирования этого зацепления в компьютере. Задача инвариантов — различать зацепления. Разумеется, для любого зацепления существует инвариант, принимающий значение 1 на этом зацеплении, и значение 0 на всех остальных. Однако вопрос о том, как вычислить значение этого инварианта на данном конкретном зацеплении (т.е. вопрос о том, совпадает ли данное зацепление с выбранным) является сложным.

Другой способ описания инвариантов пригоден не для всех инвариантов, а только для некоторого их класса — так называемых *инвариантов конечного порядка*. При этом способе фиксируются значения инварианта на некоторых *особых* узлах, а также скачки его значений при прохождении через еще более особые узлы. Возможно, что

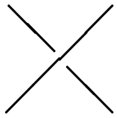


Рис. 1: Диаграмма двухкомпонентного зацепления, на которой указаны проходы и переходы

требование конечности порядка не является ограничительным: гипотетически инварианты конечного порядка также различают зацепления.

Странным и не во всех случаях объясненным образом, эти два способа описывать инварианты зацеплений иногда приводят к одинаковым ответам, и попыткам исследовать эту одинаковость и будет посвящен дальнейший материал.

2 Диаграммы зацеплений и движения Райдемайстера

Стандартный способ представления зацепления — его диаграмма. Выкинув из трехмерной сферы произвольную точку, не лежащую на зацеплении, мы получим топологическое пространство, гомеоморфное $\mathbf{R}^3$. Затем можно зафиксировать в трехмерном пространстве аффинную структуру, выбрать направление, плоскость, трансверсальную этому направлению, такую что зацепление находится по одну сторону от нее, и спроектировать зацепление на выбранную плоскость вдоль выбранного направления. Направление называется *общим* по отношению к данному зацеплению, если направление проектирования нигде не касается зацепления и у каждой точки проекции не более двух прообразов, причем образы касательных векторов в двух точках с общей проекцией неколлинеарны. Образ этой проекции с указанием ориентации компонент зацепления и *проходов и переходов* (т.е. того, какой из двух прообразов всякой точки лежит ближе к плоскости) и называется *диаграммой* зацепления, см. рис. 1. Изотопический тип зацепления однозначно восстанавливается по его диаграмме: достаточно чуть-чуть приподнять каждый переход.

Один и тот же изотопический тип зацепления может быть представлен разными диаграммами. Некоторые преобразования диаграммы очевидным образом не меняют изотопического типа зацепления. К таким преобразованиям относятся, в частности, *движения Райдемайстера*, см. рис. 2. Следующая теорема представляет собой стандартный факт теории узлов, и мы доказывать ее не будем.

Теорема 2.1 (Райдемайстер) *Любую диаграмму данного зацепления можно преобразовать в любую другую его диаграмму некоторой последовательностью движений Райдемайстера.*

Отсюда немедленно вытекает

Следствие 2.2 *Всякий инвариант диаграммы, сохраняющийся при движениях Райдемайстера, является инвариантом зацепления.*

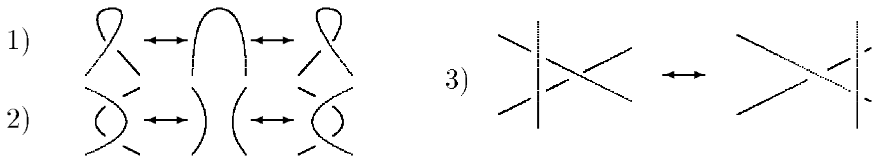


Рис. 2: Движения Райдемайстера

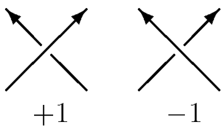


Рис. 3: Индекс двойной точки и индекс зацепления двух узлов

Это утверждение и лежит в основе построения большого числа примеров и классов примеров инвариантов зацеплений. В то же время, надежда на то, что таким образом удастся классифицировать все инварианты (а, значит, и все зацепления) невелика. Ниже мы рассматриваем примеры инвариантов зацеплений, задающихся своими значениями на диаграммах.

3 Построение инвариантов без модификации диаграммы

Инварианты зацеплений можно строить, меняя диаграмму зацепления тем или иным образом или оставляя ее неизменной. При этом изменения также бывают двух видов: либо мы заменяем некоторые проходы на переходы и наоборот, либо мы сглаживаем двойные точки.

Начнем с простых примеров инвариантов зацеплений, определяемых без изменения диаграммы. Диаграмму зацепления можно интерпретировать как граф, все вершины которого имеют валентность 4. На этом графе есть дополнительная структура: в окрестности каждой вершины четыре выходящих из нее полуребра циклически упорядочены. В результате эти полуребра разбиваются на две пары противоположных полуребер, причем одна из этих пар проходит под другой.

Пример 3.1 (индекс зацепления) *Индекс зацепления* определен для пары ориентированных узлов (тем самым, его можно определить для любой пары компонент ориентированного зацепления). Определим индекс $+1$ или -1 каждой двойной точки, где пересекаются проекции этих компонент, по правилу, изображенному на рис. 3. Половина суммы этих знаков по всем двойным точкам и есть индекс зацепления.

Другое — более топологическое — определение индекса зацепления состоит в том, что он равен числу пересечений (со знаком) второго узла с любой ориентированной пленкой (=диском), затягивающей первый узел.

Рис. 4: Правильная 3-раскраска трилистника и правильная 5-раскраска узла-восьмерки

Упражнение 3.2 Докажите, что число точек пересечения проекций двух данных узлов обязательно четно.

Пример 3.3 (раскраска Фокса) Назовем *отрезком* диаграммы кусок проекции зацепления между двумя проходами (число переходов в промежутке может быть произвольным). Сопоставим каждому отрезку элемент группы $\mathbf{Z}_q$ для заданного нечетного числа $q \geq 3$. Назовем такую q-раскраску *правильной*, если в каждой двойной точке диаграммы сумма значений на двух проходящих полуребрах равняется сумме значений на двух переходящих полуребрах (т.е., удвоенному значению на переходящем отрезке). Примеры правильных q-раскрасок приведены на рис. 4. Число правильных q-раскрасок является инвариантом зацепления, т.е. выдерживает движения Райдемайстера.

Поскольку расстановка одинаковых элементов группы на всех отрезках является правильной раскраской, число правильных q-раскрасок не меньше q; уменьшенное на q оно по-прежнему является инвариантом зацепления. Обозначим значение этой величины на узле k через $c_F(q;k)$. Рисунок 2 показывает, что для трилистника $c_F(3;T) > 0$ и для узла-восьмерки $c_F(5;E) > 0$. Покажите, что $c_F(3;E) = 0$ и $c_F(5;T) = 0$, что означает, что трилистник и восьмерка не эквивалентны друг другу и не тривиальны.

Фоксовы q-раскраски отвечают следующей вертексной модели. Положим

$$w(s^+, s^-, t^+, t^-) = \begin{cases} 1 & \text{если } s^+ = t^+ \text{ и } s^+ + t^+ = s^- + t^- \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь сопоставим полуребрам, выходящим из каждой двойной точки диаграммы, символы $s^\pm, t^\pm$ в соответствии с правилами: входящим полуребрам соответствует буква s, выходящим полуребрам — буква t; проходящим полуребрам — знак $-$, переходящим — знак $+$. Вычтя из статистического инварианта соответствующей вертексной модели значение q, получим число фоксовых раскрасок.

Заметим, что число фоксовых q-раскрасок не зависит, на самом деле, от ориентации компонент узла.

Упражнение 3.4 Докажите, что число фоксовых q-раскрасок любой диаграммы делится на q.

Упражнение 3.5 Проверьте, что число фоксовых 3-раскрасок совпадает с числом окрасок отрезков в три цвета, при которых в каждом пересечении встречаются либо один, либо три возможных цвета.

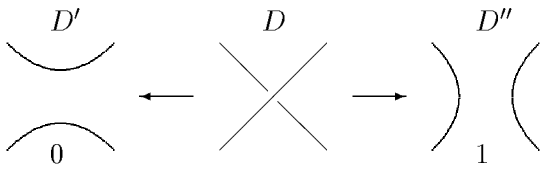


Рис. 5: Сглаживания двойных точек диаграммы

Рис. 6: Поведение диаграммного инварианта $\widetilde{X}$ при втором движении Райдемайстера

Упражнение 3.6 Докажите, что если два узла допускают нетривиальную 3-раскраску, то то же можно сказать и про их композицию.

4 Построение инвариантов зацеплений путем сглаживания двойных точек диаграммы

Пусть D — неориентированная диаграмма зацепления. Выберем в ней двойную точку и обозначим через D' и D'' две диаграммы, полученные сглаживанием этой двойной точки, см. рис. 5.

Пример 4.1 (Скобка Кауфмана) Положим значение инварианта $\widetilde{X}$ диаграммы равным 1 на тривиальной диаграмме — вложенной окружности, удовлетворяющим правилу

$$\widetilde{X}(D) = a\widetilde{X}(D') + b\widetilde{X}(D''),$$

и предположим, что при добавлении тривиальной диаграммы окружности его значение умножается на c; здесь a, b, c — некоторые константы. На рис. 6 изображено, как ведет себя такой инвариант диаграмм при втором движении Райдемайстера. Этот рисунок показывает, что при выполнении условий $ab = 1$ и $a^2 + abc + b^2 = 0$, т.е. $b = a^{-1}$, $c = -(a^2 + a^{-2})$, функция $\widetilde{X}$ выдерживает второе движение.

Упражнение 4.2 Проверьте, что при $b = a^{-1}$, $c = -(a^2 + a^{-2})$. функция $\widetilde{X}$ выдерживает и третье движение Райдемайстера.

Однако при первом движении Райдемайстера значение функции $\widetilde{X}$ умножается на $-a^3$. Для того, чтобы компенсировать этот фактор, нужно ввести поправку. Для этого сопоставим каждой двойной точке ориентированной диаграммы индекс $+1$ или -1 в соответствии с правилом, изображенным на рис. 3. Отметим, что здесь речь

Рис. 7: Плоский граф, отвечающий диаграмме узла, и расстановка знаков на его ребрах

идет обо всех двойных точках, а не только о тех, где пересекаются проекции двух заданных компонент. В частности, число этих двойных точек не обязано быть четным. *Скрученностью* $w(D)$ диаграммы D называется сумма индексов всех двойных точек. Очевидно, что при первом движении Райдемайстера скрученность диаграммы меняется на ± 1.

Упражнение 4.3 Покажите, что скрученность диаграммы не меняется при втором и третьем движениях Райдемайстера.

Положим

$$X(D) = (-a^3)^{-w(D)} \widetilde{X}(D).$$

Эта величина инвариантна относительно второго и третьего движения Райдемайстера, поскольку она выражена в терминах инвариантов этих движений. Проведенное ранее вычисление показывает, что она инвариантна и относительно первого движения Райдемайстера.

Упражнение 4.4 Укажите такое значение $a \in \mathbf{C}$, что сама функция $\widetilde{X}$ является инвариантом узлов.

Упражнение 4.5 Проверьте, что инвариант $X(L)$ различает левый и правый трилистники.

Определение 4.6 (Полином Джонса) Результат подстановки $a = q^{-1/2}$ в инвариант X называется *полиномом Джонса* зацепления.

Упражнение 4.7 Сопоставим (неориентированной) диаграмме D зацепления плоский граф $\Gamma = \Gamma(D)$ следующим образом. Диаграмма D разбивает плоскость на несколько областей. Покрасим эти области в два цвета, белый и черный, так, чтобы внешняя область была белой, и любые две соседние области имели различный цвет. Вершины нашего графа соответствуют черным областям. Две вершины соединены ребром, если имеется двойная точка, принадлежащая обеим черным областям. На ребрах расставлены знаки $+$ и $-$ в зависимости от того, положительна ли двойная точка по отношению к данной раскраске (см. рис. 7).

Зафиксируем натуральное число $Q \geq 2$ и комплексное число a, такое что

$$a^2 + Q^{1/2} + a^{-2} = 0.$$

Рассмотрим множество $S = \{1, \dots, Q\}$ и модель Поттса, заданную весом $w : S \times S \to \mathbf{C}$:

$$w(s,t) = \begin{cases} -a^3 & \text{if } s = t \\ a^{-1} & \text{if } s \neq t. \end{cases}$$

Соответствующая спинорная модель для графов со знаками на ребрах имеет вид $(S, w_+, w_-, \mathbf{C})$, где $w_+(s,t) = w(s,t)$, а $w_-(s,t) = w(s,t)^{-1}$. Значение статфункции этой модели на графе Γ равно

$$Q^{(1-|V(\Gamma)|)/2} \sum_{\sigma : V(\Gamma) \to S} \prod_{\{A,B\} \in E_+(\Gamma)} w_+(\sigma(x), \sigma(y)) \prod_{\{A,B\} \in E_-(\Gamma)} w_-(\sigma(x), \sigma(y)).$$

Докажите, что после умножения этой функции на $(-a^{-3})^{w(D)}$ мы получаем значение полинома Джонса в точке a^{-4}.

5 Гомологии комплекса Хованова

В 1999 году М. Хованов сопоставил диаграмме узла некоторый комплекс, гомологии которого тоже являются инвариантом узла. Этот инвариант заведомо более тонкий, чем полином Джонса — полином Джонса описывает эйлерову характеристику этого комплекса. Точнее говоря, комплекс Хованова распадается в прямую сумму комплексов, а коэффициенты полинома Джонса являются эйлеровыми характеристиками соответствующих прямых слагаемых.

Двойную точку неориентированной диаграммы можно сгладить двумя различными способами, которым мы сопоставляем элементы 0 и 1 кольца $\mathbf{Z}_2$, см. рис. 5. Для данной диаграммы узла с n двойными точками все возможные сглаживания двойных точек образуют n-мерный куб $\mathbf{Z}_2^n$. Вершины этого куба взаимно-однозначно соответствуют наборам из n нулей и единиц, занумерованных двойными точками. В результате каждого сглаживания диаграмма превращается в набор окружностей. Сопоставим такому набору многочлен

$$(-q)^{\text{число единиц}}(q + q^{-1})^{\text{число окружностей}},$$

где показателями степени служат число двойных точек со сглаживанием 1 и число компонент связности сглаженной кривой. Сумма этих многочленов по всем вершинам куба почти совпадает с полиномом Джонса. Для того, чтобы сделать совпадение полным, ее нужно умножить на

$$(-1)^{n_+} q^{n_+ - 2n_-},$$

где через n_+ и n_- обозначены, соответственно, число двойных точек с индексом $+1$ и -1 в *ориентированной* диаграмме зацепления, см. рис. 8.

Зафиксируем двумерное векторное пространство V, порожденное двумя фиксированными векторами v_+, v_-. Такое распадение задает градуировку пространства V: мы полагаем степень вектора v_+ равной 1, а степень вектора v_- равной -1. При всяком сглаживании двойных точек диаграмма распадается на несколько замкнутых кривых. Сопоставим такой кривой с k компонентами векторное пространство $V^{\otimes k}$. В

Рис. 8: Куб сглаживаний трилистника, вычисление полинома Джонса по этому кубу и комплекс Хованова трилистника

Рис. 9: Кобордизмы, отвечающие сглаживаниям диаграммы, и соответствующие операции над векторными пространствами

нем имеется естественная градуировка, индуцированная градуировкой пространства V.

Сглаживание двойной точки является одной из двух операций: либо две разные компоненты кривой сливаются в одну, либо наоборот, происходит расщепление компоненты. Такое преобразование можно представить в виде кобордизма окружности и пары окружностей, см. рис. 9. Сопоставим первой операции ассоциативное коммутативное умножение $m : V \otimes V \to V$, заданное формулой

$$v_+v_+ = v_+; \quad v_+v_- = v_-; \quad v_-v_- = 0,$$

а второй коассоциативное кокоммутативное коумножение $\mu : V \to V \otimes V$, заданное формулой

$$\mu(v_+) = v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+; \quad \mu(v_-) = v_- \otimes v_-.$$

После сдвига градуировки в образе на 1 обе операции становятся сохраняющими градуировку.

Таким образом, множеству всех возможных разрешений двойных точек диаграммы сопоставляется куб из векторных пространств и отображений. В вершинах куба стоят тензорные степени пространства V, причем показатель степени равен числу компонент сглаженной кривой. Градуировка такого пространства сдвинута на число, равное числу единичных сглаживаний. Ребра куба направлены таким образом, что нулевое сглаживание вдоль каждого ребра заменяется единичным. Такая операция является либо m-операцией, либо μ-операцией.

Построенный таким образом куб является коммутативным: обход вдоль любой пары векторов в одной двумерной грани приводит к одному и тому же результату. Если мы хотим сопоставить такому кубу некоторый комплекс, то коммутативность следует заменить антикоммутативностью. Для этого нужно заменить знак в некоторых отображениях на ребрах куба, причем таким образом, чтобы число ребер с замененным знаком в любой двумерной грани было нечетным. Такая процедура возможна. Один из способов ее выполнить состоит в следующем. Упорядочим всякое подмножество I множества двойных точек. Тогда, если в I больше одного элемента, все порядки в множестве I разобьются на два класса в зависимости от того, четно или нечетно число транспозиций в переходе от данного порядка к фиксированному. Назовем первый класс четным, а второй нечетным. Всякая стрелка в кубе является добавлением некоторого элемента a к некоторому множеству I, такому, что $a \notin I$. При этом и на I, и на $I \sqcup \{a\}$ фиксированы некоторые порядки. Присвоим стрелке знак $+$, если порядок Ia (элемент a приписан в конце множества I) совпадает с заданным порядком на множестве $I \sqcup \{a\}$ и $-$ в противном случае. Поскольку порядки Iab и Iba заведомо противоположны, мы получаем требуемый результат — всякая двумерная грань куба антикоммутативна.

В результате мы получаем операцию d из прямой суммы пространств, стоящих в вершинах куба, в себя, обладающую свойством $d^2 = 0$. На каждом конкретном элементе эта операция выглядит либо как m на паре сомножителей, либо как μ на одном сомножителе. Указанная прямая сумма дополнительно градуирована расстоянием от начальной вершины куба до соответствующей вершины (напомним, что в каждой вершине стоит градуированное пространство). Таким образом, мы приходим к комплексу

$$0 \longrightarrow C_{-n} \xrightarrow{d} C_{-n+1} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_0 \longrightarrow 0.$$

Этот комплекс распадается в прямую сумму комплексов, каждый из которых отвечает внутренней градуировке в каждом из пространств C_k. Эйлерова характеристика соответствующего комплекса и является коэффициентом при соответствующей степени q в полиноме Джонса узла.

Теорема 5.1 (Хованов) *Гомологии комплекса Хованова являются инвариантами зацепления.*

Инвариантность полинома Джонса, разумеется, также вытекает из этой теоремы.

Доказательство теоремы Хованова состоит в последовательной проверке инвариантности гомологий (в другой терминологии, квазиинвариантности комплекса) относительно движений Райдемайстера. Эта проверка, однако, не всегда тривиальна в силу существенной нелокальности конструкций. Природа комплекса Хованова остается загадочной.

Пример 5.2 Простейшие примеры вычисления гомологий комплекса Хованова для диаграмм с одной и двумя двойными точками приведены на рис. 10.

Пример 5.3 В простых случаях комплекс Хованова несложно вычислить, однако если число самопересечений диаграммы невелико, то содержащаяся в его гомологиях информация не больше той, что закодирована в полиноме Джонса. Отличие имеется,

Рис. 10: Вычисление гомологий комплекса Хованова для диаграмм с малым числом двойных точек

Рис. 11: Торический узел $T_{2,-5}$ и его нулевое сглаживание

например, на торических узлах $T_{2,k}$ (см. рис. 11). Например, полином Джонса узла $T_{2,-5}$ равен

$$V(T_{2,-5}) = q^{-3} + q^{-5} + q^{-7} - q^{-15},$$

а гомологии у комплекса, помимо градуировок $(0,-3)$, $(0,-5)$, $(-2,-7)$, $(-5,-15)$, имеются еще и в точках $(-3,-11)$, $(-4,-11)$. При вычислении эйлеровой характеристики последняя пара групп гомологий взаимно уничтожается. Если же рассматривать гомологии с коэффициентами в кольце целых чисел, а не в поле характеристики 0, то у комплекса дополнительно имеется кручение $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ в точках $(-2,-9)$, $(-4,-13)$.

Вычисление эйлеровой характеристики комплекса Хованова для узла $T_{2,-5}$ проиллюстрировано таблицей 1. Число компонент связности в сглаженной диаграмме однозначно определяется числом единичных сглаживаний. Для числа единичных сглаживаний $k < 5$ число компонент связности равно $5 - k$, а для пяти единичных сглаживаний это число равно 2. Поскольку число вершин, отвечающих k единичным сглаживаниям, равно $\binom{5}{k}$, комплекс Хованова (с надлежащим сдвигом градуировки, указанным в фигурных скобках) имеет вид

$$0 \longrightarrow V^{\otimes 5}\{10\} \longrightarrow \binom{5}{1} V^{\otimes 4}\{9\}$$

$$\longrightarrow \binom{5}{2} V^{\otimes 3}\{8\} \longrightarrow \binom{5}{3} V^{\otimes 2}\{7\} \longrightarrow \binom{5}{4} V\{6\} \longrightarrow V^{\otimes 2}\{5\} \longrightarrow 0.$$

В таблице 1 приведены размерности однородных подпространств пространств из комплекса Хованова.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	χ
	$V^{\otimes 5}\{10\}$	$5V^{\otimes 4}\{9\}$	$10V^{\otimes 3}\{8\}$	$10V^{\otimes 2}\{7\}$	$5V^{\otimes 3}\{6\}$	$V^{\otimes 2}\{5\}$	
-3	0	0	0	0	0	1*	1
-5	1	5	10	10	5	2*	1
-7	5	20	30	20*	5	1	1
-9	10	30	30	10			0
-11	10	20*	10*				0
-13	5	5					0
-15	1*						-1

Таб. 1: Размерности подпространств и эйлерова характеристика однородных слагаемых комплекса Хованова диаграммы $T_{2,-5}$. В верхней строке указан вес пространства, в левой строке — градуировка соответствующего подпространства. Звездочками помечены клетки, в которых сосредоточены гомологии

Знание размерностей однородных подпространств достаточно для вычисления эйлеровой характеристики, что и используется при определении полинома Джонса. Для вычисления гомологий, однако, требуется знать, как устроен дифференциал. Гомологии комплекса Хованова для узлов $T_{2,k}$ поддаются относительно простому явному вычислению благодаря тому, что диаграмма нулевого сглаживания устроена очень просто — она представляет собой цепочку из k циклически упорядоченных окружностей, — и каждая замена нулевого сглаживания двойной точки единичным приводит к склейке двух соседних окружностей в одну (исключение составляет последний шаг, когда при замене всех нулевых сглаживаний единичными мы получаем две компоненты связности). В результате естественные базисы во всех однородных пространствах таблицы допускают простое комбинаторное описание.

Например, занумеруем все двойные точки в диаграмме узла $T_{2,-5}$ числами от 1 до 5 по кругу, и зафиксируем на каждом подмножестве множества $\{1,2,3,4,5\}$ порядок, совпадающий с ограничением на это подмножество порядка $1 < 2 < 3 < 4 < 5$. Компонента веса -11 пространства $10V^{\otimes 3}\{8\}$ порождена сглаженными диаграммами из трех компонент связности, каждой из которых соответствует вектор v_-. Эти три компоненты составлены из пяти окружностей нулевого сглаживания, причем разбиения бывают двух типов: $(3,1,1)$ и $(2,2,1)$. Сопоставим разбиениям первого типа вектора a, а разбиениям второго типа — вектора b. Векторов каждого типа имеется по пять штук, занумерованных, скажем, номером первой (в циклическом порядке) двойной точки на 3-компоненте (соотв., на первой 2-компоненте). Аналогично, компонента веса -11 пространства $20V^{\otimes 2}\{9\}$ порождена диаграммами из четырех окружностей с разбиением $(2,1,1,1)$, причем на одной из этих окружностей стоит вектор v_+, на остальных — вектора v_-. Таких диаграмм — в зависимости от номера первой двойной точки на сдвоенной окружности — ровно 20 штук.

К каждой из двадцати образующих диаграмм можно применить два оператора $\pm m$ (сгладить одну из двух точек на границе компонент, помеченных векторами v_+ и v_-). Напомним, что выбор знака при операторе m определяется зафиксированным нами порядком на множестве двойных точек. В результате мы получим следующие двадцать векторов в компоненте веса -11 пространства $10V^{\otimes 3}\{8\}$:

$$\begin{array}{rrrr}
a_1-a_5; & a_1+b_1; & b_1+b_4; & -a_5+b_4;\\
a_2-a_4; & a_2+b_2; & b_2-b_5; & -a_1-b_5;\\
a_3-a_2; & a_3-b_3; & -b_3-b_1; & -a_2-b_1;\\
-a_4-a_3; & -a_4-b_4; & -b_4-b_2; & -a_3-b_2;\\
a_5+a_4; & a_5+b_5; & b_5+b_3; & a_4+b_3.
\end{array}$$

Нетрудно видеть, что первый и третий столбики векторов порождают каждый четырехмерное подпространство в образе, причем эти два подпространства имеют нулевое пересечение. Любой из векторов второго и четвертого столбиков порождает одномерное подпространство, имеющее нулевое пересечение с прямой суммой четырехмерных подпространств. Тем самым, образ дифференциала по меньшей мере девятимерен. С другой стороны, вектор

$$a_1+a_2+a_3-a_4+a_5+b_1+b_2-b_3-b_4+b_5$$

не лежит в этом образе, что и дает одномерные гомологии в соответствующем члене таблицы.

Близкие, хотя и более упорядоченные рассуждения позволили Хованову сосчитать гомологии комплекса для любого узла $T_{2,k}$.

Утверждение 5.4 *Комплекс Хованова узла $T_{2,k}$ имеет одномерные гомологии веса 0 в градуировке k и $k-2$, веса $-2j$ при $1\le j\le\frac{k-1}{2}$ в градуировке $4j-2+k$, веса $-2j-1$ в градуировке $4j+2+k$. Если k четно, то дополнительно имеются одномерные гомологии в градуировках $3k$ и $3k-2$. При вычислении гомологий с коэффициентами в $\mathbf{Z}$ дополнительно имеется $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-кручение в гомологиях веса $2j$, $1\le j\le\frac{k-1}{2}$, в градуировке $4j+k$.*

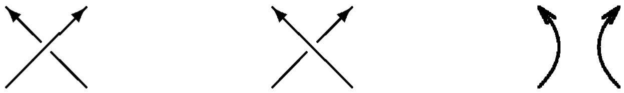
6 Замена проходов переходами

Любую диаграмму узла можно, заменив некоторые проходы переходами, превратить в диаграмму тривиального узла. Для этого достаточно, отправившись из любой одинарной точки диаграммы вдоль узла по его направлению, при всяком первом прохождении двойной точки заменять проход на переход и ничего не делать с переходом. Аналогично, имея диаграмму зацепления, мы можем, заменив некоторые проходы переходами, превратить эту диаграмму в диаграмму тривиального зацепления незаузленных компонент. Таким образом, если у нас задано значение инварианта на тривиальном узле или зацеплении и задано правило изменения значения инварианта при замене прохода переходом, то мы можем определить значение этого инварианта на любом зацеплении, если диаграмма этого зацепления задана. Ниже описаны примеры такого задания. Значение каждого из этих инвариантов на тривиальном узле равно 1. В некоторых случаях они приводят к уже известным нам инвариантам.

На рис. 12 изображено, как выглядят диаграммы D_+, D_- и D_0 ориентированных зацеплений.

Пример 6.1 (Полином Конвея)

$$\nabla(D_+)-\nabla(D_-)=z\nabla(D_0).$$



D_+ D_- D_0

Рис. 12: Локальное изображение диаграмм D_+, D_- и D_0. Вне малой окрестности рисунка эти три диаграммы должны быть одинаковыми

Пример 6.2 (Полином Александера)

$$\Delta(D_+) - \Delta(D_-) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\Delta(D_0).$$

Упражнение 6.3 Докажите, что полином Александера для расщепляющихся зацеплений равен нулю.

Пример 6.4 (Полином Джонса)

$$qV(D_+) - q^{-1}V(D_-) = \left(q^{-1/2} - q^{1/2}\right)V(D_0)$$

Упражнение 6.5 Проверьте эквивалентность этого определения полинома Джонса определению из предыдущего раздела.

Пример 6.6 (Полином HOMFLY) Это полином P, зависящий от двух переменных m и l и определяющийся равенством

$$mP(D_+) - lP(D_-) = P(D_0).$$

Пример 6.7 (Полином Джонса от двух переменных)

$$(\lambda q)^{-1/2}\chi(D_+) - \lambda q\chi(D_-) = (1 - q^{-1/2})\chi(D_0).$$

Все предыдущие примеры реализуются как результат подстановки специальных значений в полином Джонса от двух переменных.