Высший Колледж Математики

Инварианты графов и узлов. Лекции 9 и 10.
Инварианты Васильева, происходящие из алгебр Ли

1 Построение весовых систем по алгебрам Ли

Пусть $\mathcal{G}$ — комплексная алгебра Ли, т.е. векторное пространство с билинейной операцией $[,]$, удовлетворяющей *условию антисимметрии* $[x, y] = -[y, x]$ и *тождеству Якоби*

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Предположим, что на $\mathcal{G}$ задано невырожденное инвариантное скалярное произведение. Это означает, что на $\mathcal{G}$ задана невырожденная симметричная билинейная форма $(\cdot, \cdot)$, такая что

$$([x, y], z) = (x, [y, z])$$

для любых элементов $x, y, z \in \mathcal{G}$. Примером такой алгебры Ли может служить любая полупростая алгебра. Невырожденное инвариантное скалярное произведение на ней задается *формой Картана–Киллинга*

$$(x, y) = \mathrm{Tr}\ \ \mathrm{ad}\ \ x \circ \mathrm{ad}\ \ y,$$

где через ad обозначено *присоединенное представление* алгебры Ли $\mathcal{G}$. Однако списком полупростых алгебр Ли примеры не исчерпываются.

Весовую систему, отвечающую алгебре Ли $\mathcal{G}$, будем обозначать через $b^{\mathcal{G}}$. Область ее значений мы опишем позднее.

Зафиксируем в $\mathcal{G}$ базис $e_1, \ldots, e_m$, $m = \dim\ \mathcal{G}$, ортонормированный относительно выбранного скалярного произведения. Возьмем хордовую диаграмму c порядка n и рассмотрим какое-нибудь ее дуговое представление a (см. рис. **??**). Сопоставим каждой дуге диаграммы a один из индексов $1, \ldots, m$ (или, что то же самое, один из базисных элементов $e_1, \ldots, e_m$). С такой нумерацией дуг можно ассоциировать слово длины $2n$ в алфавите e_i. Для этого нужно на обеих концах дуги, помеченной индексом i, написать букву e_i и прочитать полученную последовательность из $2n$ букв слева направо. Для диаграммы с рисунка это будет слово

$$e_1 \ldots$$

Такое слово можно считать элементом универсальной обертывающей алгебры $U\mathcal{G}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$. (*Универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли $\mathcal{G}$ называется ассоциативная алгебра, полученная факторизацией кольца многочленов $\mathbf{C}[e_1, \ldots, e_m]$ по коммутационным соотношениям $[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k$, где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathcal{G}$.)

Просуммировав полученные слова по всем возможным расстановкам индексов на дугах диаграммы a (в сумме будет m^n слагаемых), мы получим элемент универсальной обертывающей алгебры $U\mathcal{G}$, который обозначим через $b^{\mathcal{G}}(a)$. Оказывается, что этот элемент не зависит от выбора дугового представления a хордовой диаграммы c и обязательно лежит в *центре* $ZU\mathcal{G}$ этой универсальной обертывающей алгебры (т.е. он коммутирует со всеми ее элементами)

Центр универсальной обертывающей алгебры представляет собой коммутативное кольцо, и отображение $b^{\mathcal{G}} : \mathcal{M} \to ZU\mathcal{G}$ является весовой системой в этом кольце. Если алгебра Ли $\mathcal{G}$ коммутативна, то значения весовой системы $b^{\mathcal{G}}$ одинаковы на всех хордовых диаграммах, и такая весовая система интереса не представляет. Простейшей некоммутативной алгеброй Ли, допускающей инвариантное невырожденное скалярное произведение, является трехмерная алгебра Ли (2). В ней можно выбрать ортонормированный базис x, y, z с коммутационными соотношениями $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$. Центр $ZU(2)$ ее универсальной обертывающей алгебры изоморфен алгебре многочленов $\mathbf{C}[C]$ от одной переменной C, *элемента Казимира* $C = x^2 + y^2 + z^2$. Весовая система $b^{(2)}$ подробно описана ниже.

Упражнение 1.1 Проверьте, что в единственной некоммутативной двумерной алгебре Ли можно выбрать базис x, y, в котором $[x, y] = x$, и на ней нет невырожденного инвариантного скалярного произведения. Что можно сказать про трехмерные алгебры Ли?

Сведем теперь сформулированные утверждения о свойствах отображения $b^{\mathcal{G}}$ в теорему и докажем их.

Теорема 1.2 1. *Отображение $b^{\mathcal{G}}$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathcal{G}$.*

2. *Значения отображения $b^{\mathcal{G}}$ на различных дуговых представлениях одной хордовой диаграммы совпадают.*

3. *Значения отображения $b^{\mathcal{G}}$ лежат в центре $ZU\mathcal{G}$ универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathcal{G}$.*

4. *Отображение $b^{\mathcal{G}}$ является мультипликативной весовой системой, т.е. это гомоморфизм алгебр $b^{\mathcal{G}} : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$.*

Образ отображения $b^{\mathcal{G}}$ — коммутативная алгебра, иногда с достаточно сложной структурой, и вычисление этого отображения совсем непростое дело. Однако из общей конструкции несложно получить большое количество весовых систем со значениями в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Такая весовая система строится по любому представлению $R : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(N)$ алгебры Ли G. Такое представление индуцирует и представление универсальной обертывающей алгебры $U\mathcal{G} \to \mathrm{GL}(N)$ (если известно как представлены базисные элементы алгебры Ли $\mathcal{G}$, то мы знаем и представление для любого многочлена от них); мы будем обозначать индуцированное представление тем же символом R. Если теперь взять след элемента в представлении, то мы получим весовую систему с числовыми значениями.

Следствие 1.3 *Сквозное отображение*

$$\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr} \circ R \circ b^{\mathcal{G}} : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$$

является мультипликативной весовой системой.

Разумеется, сквозное отображение было бы весовой системой и без множителя $\frac{1}{N}$, он нужен лишь для сохранения мультипликативности: единичный элемент алгебры $U\mathcal{G}$ переходит в представлении в тождественное отображение, след которого равен N, и после деления на N мы получаем отображение, переводящее единичный элемент в единицу поля $\mathbf{C}$.

Доказательство теоремы. Докажем сначала, что значение отображения $b^{\mathcal{G}}$ на дуговой диаграмме не зависит от выбора ортонормированного базиса, т.е. оно инвариантно относительно действия ортогональной группы на $\mathcal{G}$. Ортогональная группа порождена поворотами в координатных плоскостях, поэтому достаточно проверить инвариантность отображения $b^{\mathcal{G}}$ относительно, скажем, произвольного поворота в плоскости $\langle e_1, e_2\rangle$. Такой поворот имеет вид $e_1 = ae_1' + be_2'$, $e_2 = ce_1' + de_2'$, где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ортогональная.

На концах произвольной дуги могут быть написаны символы e_1, e_1 или e_2, e_2. При подстановке, определяемой поворотом, мы получаем на концах этой дуги пару символов e_1', e_1' с коэффициентом $a^2+c^2 = 1$, пару символов e_2', e_2' с коэффициентом $b^2+d^2 = 1$, а каждую из пар символов e_1', e_2' и e_2', e_1' с коэффициентом $ab + dc = 0$, и утверждение доказано. Заметим, что структура универсальной обертывающей алгебры Ли на $U\mathcal{G}$ в этом доказательстве никак не использовалась: оно справедливо и для произвольной ассоциативной алгебры, порожденной ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_m$.

Докажем теперь, что образ отображения $b^{\mathcal{G}}$ лежит в центре $ZU\mathcal{G}$. Для этого проверим, что элемент $b^{\mathcal{G}}(a)$ перестановочен с любым базисным элементом, например с e_1. Будем постепенно переносить элемент e_1 с левого отрезка дуговой диаграммы направо. Если на какой-то дуге написан символ e_i, то при проходе элементом e_1 левого конца этой дуги возникает поправка

$$e_1e_i - e_ie_1 = [e_1, e_i] = \sum_k C_{1i}^k e_k,$$

а при проходе правого конца той же дуги — такая же поправка. Тем самым, при фиксированных элементах на остальных дугах суммарная поправка по всем нумерациям данной дуги имеет вид

$$\begin{aligned}
\sum_i (w_0e_1e_iw_1e_iw_2 - w_0e_ie_1w_1e_iw_2 + w_0e_iw_1e_1e_iw_2 - w_0e_iw_1e_ie_1w_2) &= \\
= \sum_{i,k} (C_{1i}^k w_0e_kw_1e_iw_2 + C_{1i}^k w_0e_iw_1e_kw_2) & \\
= \sum_{i,k} (C_{1k}^i w_0e_iw_1e_kw_2 + C_{1i}^k w_0e_iw_1e_kw_2) & \\
= 0. &
\end{aligned}$$

Здесь через w с индексом обозначены фиксированные слова на остальных частях диаграммы, а при переходе к последней сумме мы поменяли местами индексы i и k в первом слагаемом. Последнее равенство вытекает из того, что структурные константы в ортонормированном базисе алгебры Ли с инвариантным невырожденным скалярным произведением антисимметричны относительно перестановок верхнего и правого нижнего индекса:

$$-C_{ji}^k = C_{ij}^k = ([e_i, e_j], e_k) = (e_i, [e_j, e_k]) = C_{jk}^i.$$

Таким образом, проход базисного элемента через оба конца одной дуги дает нулевую поправку, а значит и при проходе через всю диаграмму поправка будет нулевой.

Осталось проверить (и это самое главное), что для отображения $b^{\mathcal{G}}$ выполняется четырехчленное соотношение. Отсюда — в силу изоморфизма алгебр Хопфа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}$ — будет вытекать и то, что его значение на дуговом представлении хордовой диаграммы не зависит от выбора этого представления. Вычисление вклада, вносимого четырьмя членами 4-членного соотношения, происходит, как и выше. Фиксируем нумерацию множества дуг, не участвующих в соотношении и подсчитаем суммарный вклад по всем возможным нумерациям двух участвующих в нем дуг. Получим

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{i,j}(w_0e_ie_jw_1e_iw_2e_jw_3 - w_0e_je_iw_1e_iw_2e_jw_3 - w_0e_iw_1e_je_iw_2e_jw_3 + w_0e_iw_1e_ie_jw_2e_jw_3) \\
&= \sum_{i,j}(w_0[e_i,e_j]w_1e_iw_2e_jw_3 + w_0e_iw_1[e_i,e_j]w_2e_jw_3) \\
&= \sum_{i,j,k,l}(C_{ij}^k w_0e_kw_1e_iw_2e_jw_3 + C_{ij}^l w_0e_iw_1e_lw_2e_jw_3).
\end{aligned}$$

Делая замену индексов $i \mapsto l$, $k \mapsto i$, мы получаем равенство

$$\Delta = \sum_{i,j,l}(C_{lj}^i w_0e_iw_1e_lw_2e_jw_3 + C_{ij}^l w_0e_iw_1e_lw_2e_jw_3) = 0,$$

что и требовалось.

2 Алгебры Ли в стандартных представлениях

Всякое представление алгебры Ли, наделенной инвариантным невырожденным скалярным произведением, порождает, как мы знаем, весовую систему со значениями в $\mathbf{C}$. Значение этой весовой системы на хордовой диаграмме c оказывается тесно связанной со структурой поверхности $S(c)$, сопоставляемой данной хордовой диаграмме. Причины этой связи и ее точная формулировка в общем случае не вполне понятны, как непонятно и то, распространяется ли это утверждение на случай полного инварианта (безотносительно к представлению). Посмотрим, как эта связь выглядит на примерах.

Пример 2.1 (Стандартное представление алгебры Ли $\mathrm{gl}(N)$) Алгебра Ли $\mathrm{gl}(N)$ в своем стандартном представлении изоморфна алгебре Ли всех комплексных $N \times N$-матриц. Инвариантное невырожденное скалярное произведение задается равенством

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY).$$

Утверждение 2.2 *Значение весовой системы, построенной по стандартному представлению алгебры Ли $\mathrm{gl}(N)$, на хордовой диаграмме c равно $N^{f(c)-1}$, где $f(c)$ — число компонент границы поверхности $S(c)$, построенной по диаграмме c.*

Для доказательства нам будет удобно несколько отойти от принятых ранее соглашений, и вместо ортонормированного базиса в $\mathrm{gl}(N)$ рассмотреть базис e_{ij}, состоящий из матриц, у которых на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а во всех остальных клетках — нули. Скалярные произведения (e_{ij}, e_{ji}) равны 1, а скалярные произведения всех остальных пар базисных векторов нулевые. Ясно, что если вместо одного и того же элемента ортонормированного базиса на концах каждой дуги диаграммы написать пару элементов e_{ij}, e_{ji} и просуммировать по всем таким расстановкам, то результат будет тем же самым.

Упражнение 2.3 Выпишите структурные константы алгебры Ли $\mathrm{gl}(N)$ в базисе e_{ij}, $1 \leq i, j \leq N$.

Пусть у нас зафиксирована какая-то расстановка букв e_{ij} на концах дуг хордовой диаграммы c (или, что все равно, ее дугового представления). Ясно, что если такая расстановка дает ненулевой вклад в след, то этот вклад равен 1. Действительно, если произведение двух матриц вида e_{ij} отлично от нуля, то оно само является матрицей того же вида. Тем самым, произведение нескольких таких матриц либо нулевое, либо содержит ровно одну единицу, и след произведения равен либо нулю, либо 1.

Удвоим хорды диаграммы и расставим с каждого конца хорды индексы i, j по сторонам удвоенной хорды, если соответствующий конец хорды помечен символом e_{ij}. Тогда по каждой стороне удвоенной хорды будут стоять одинаковые индексы, так как ее концы имеют пометки e_{ij}, e_{ji}. Проверим теперь, что произведение дает ненулевой вклад в след в том и только в том случае, если все стороны хорд, принадлежащие *одной компоненте границы* поверхности $S(c)$, помечены одним индексом. Действительно, произведение двух подряд идущих элементов $e_{ij}e_{kl}$ в мономе отлично от нуля только, если $j = k$, и в этом случае оно равно e_{il}. Поскольку движение вдоль компоненты границы происходит либо вдоль "берега" хорды, либо вдоль дуги окружности, мы заключаем, что все отрезки каждой компоненты должны быть помечены одним индексом. С другой стороны, если это так, то вклад соответствующего монома равен $\mathrm{Tr}\ e_{ii}$ для некоторого i, т.е. равен 1. Поэтому сумма всех вкладов равна $N^{f(c)}$ — число присвоений индекса каждой из $f(c)$ компонент. После деления на N получаем утверждение предложения.

Пример 2.4 (стандартное представление алгебры Ли $\mathrm{so}(N)$) Ситуация со стандартным представлением алгебры Ли $\mathrm{so}(N)$ полностью аналогична предыдущей. В стандартном представлении эта алгебра Ли представляет собой алгебру Ли кососимметрических матриц. В ней можно выбрать базис, состоящий из матриц e_{ij}, $i < j$, в которых на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, в симметричной клетке относительно главной диагонали стоит -1, а остальные элементы равны 0. Скалярное произведение (e_{ij}, e_{kl}) отлично от нуля, если либо $(i, j) = (l, k)$, либо $(i, j) = (k, l)$. Первая возможность соответствует простому удвоению хорды, вторая — удвоению хорды с перекручиванием. Рассуждение, повторяющее рассуждение из предыдущего упражнения, доказывает следующее утверждение.

Утверждение 2.5 *Значение весовой системы, построенной по стандартному представлению алгебры Ли* $\mathrm{so}(N)$*, на хордовой диаграмме* c *с* n *хордами равно*

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} N^{f(c^{\sigma})-1},$$

где суммирование идет по всем 2^n оснащениям σ диаграммы c, через $|\sigma|$ обозначено число единиц в оснащении σ, $f(c^\sigma)$ — число компонент границы поверхности $S(c^\sigma)$, построенной по диаграмме c с оснащением σ.

3 Полные инварианты, построенные по простейшим алгебрам и супералгебрам Ли

Вычисление полного инварианта со значением в центре универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли обычно гораздо более трудоемко, чем вычисление инварианта, отвечающего фиксированному представлению. Однако в некоторых простейших случаях это вычисление удается задать рекуррентными формулами.

Пример 3.1 (алгебра Ли (2)) Алгебра Ли (2) является простейшей некоммутативной алгеброй Ли, на которой существует невырожденное инвариантное скалярное произведение. Центр $ZU(2)$ универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли (2) изоморфен алгебре многочленов $\mathbf{C}[C]$ от одной переменной C, элемента Казимира. В работе Чмутова и Варченко доказаны следующие рекуррентные формулы, позволяющие выразить значения инварианта $b^{(2)}$ на хордовых диаграммах через его значения на более простых хордовых диаграммах.

Разумеется, значение $b^{(2)}$ на хордовой диаграмме с одной хордой равно C. Так как инвариант $b^{(2)}$ является гомоморфизмом колец, то его значение на произведении хордовых диаграмм равно произведению значений на сомножителях.

Всякая хорда делит окружность на две части. Назовем *длиной* хорды минимум из двух чисел: числов концов остальных хорд, на каждой из этих частей. Если диаграмма не распадается в произведение и содержит "лист", т.е. хорду длины 1, то значение инварианта $b^{(2)}$ на этой диаграмме равно его значению на диаграмме с выкинутым листом, умноженному на $C-1$. Если же хордовая диаграмма не содержит листьев, то выберем в ней кратчайшую хорду (если таких хорд несколько, подойдет любая). Тогда обе соседних хорды с короткой стороны кратчайшей хорды пересекают ее (не пересекающая хорда была бы короче). В этой ситуации применимо одно из двух рекуррентных правил, изображенных на рис. **??**. Все три слагаемых, отличных от исходной диаграммы, стоящие в левой части равенства, проще исходной диаграммы, так как содержат меньше пересечений хорд, а оба слагаемых в правой части проще, так как содержат меньше хорд.

Значение инварианта $b^{(2)}$ на хордовой диаграмме порядка n является многочленом от C степени n со старшим коэффициентом 1 и нулевым свободным членом.

Упражнение 3.2 Воспользовавшись рекуррентными правилами, докажите, что коэффициент при C^{n-1} равен числу попарных пересечений хорд в диаграмме, взятому со знаком $-$.

Коэффициент при C^{n-2} тоже выражается в терминах графа пересечений диаграммы. Его важной составляющей является число вершинных четырехугольников в графе пересечений. Однако уже про следующие коэффициенты неизвестно, можно ли их выразить через 4-инварианты.

Пример 3.3 (супералгебра Ли $\mathrm{gl}(1|1)$) Вайнтроб распространил конструкцию весовых систем на супералгебры Ли. Вместе с соавторами он вывел рекуррентные правила вычисления инварианта $b^{\mathrm{gl}(1|1)}$ со значениями в центре простейшей супералгебры Ли $\mathrm{gl}(1|1)$. Этот центр представляет собой градуированную алгебру многочленов $\mathbf{C}[C, y]$ от двух переменных: элемента Казимира C веса 1 и элемента y веса 2. Значение $b^{\mathrm{gl}(1|1)}$ на диаграмме с одной хордой равно C, на произведении диаграмм — произведению значений на сомножителях. Для значений на нераспадающихся диаграммах справедлива рекуррентная формула

$$\begin{aligned} b^{\mathrm{gl}(1|1)}(D) &= Cb^{\mathrm{gl}(1|1)}(D_a) - y\sum_i b^{\mathrm{gl}(1|1)}(D_{a,i}) \\ &\quad + y\sum_{i<j}(b^{\mathrm{gl}(1|1)}(D^{+-}_{a,ij}) + b^{\mathrm{gl}(1|1)}(D^{-+}_{a,ij}) - b^{\mathrm{gl}(1|1)}(D^{l}_{a,ij}) - b^{\mathrm{gl}(1|1)}(D^{r}_{a,ij})). \end{aligned}$$

Здесь D — исходная диаграмма, a — фиксированная хорда в ней, индексы i, j пробегают все хорды, перескающие хорду a, а все диаграммы, входящие в равенство, получены из исходной диграммы D и изображены на рис. **??**.

Нетрудно видеть, что значение инварианта $b^{\mathrm{gl}(1|1)}$ на любой диаграмме порядка n является многочленом веса n. Несмотря на то, что рекуррентные формулы для этого инварианта выглядят сложнее, чем в случае (2) (там число слагаемых постоянно, а здесь оно заведомо больше, да к тому же еще и зависит от числа хорд, пересекающих выбранную хорду a), результаты вычисления по ним оказываются заметно проще. Однако и в этом случае не проверено, что значение инварианта полностью определяется графом пересечений диаграммы.

4 Действие Черна–Саймонса и виттеновское описание связи инвариантов зацеплений с алгебрами Ли

В этом разделе мы кратко опишем интерпретацию связи между инвариантами зацеплений и алгебрами Ли, принадлежащую Виттену.

Фиксируем группу Ли G и представление $R : G \to \mathrm{GL}(N, \mathbf{R})$. Рассмотрим трехмерное многообразие M (конструкция имеет смысл и в случае, когда $M = S^3$ есть трехмерная сфера) и тривиальное векторное расслоение $M \times \mathbf{R}^N \to M$ над ним. Обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$ пространство всех связностей со структурной группой G на этом расслоении. *Связность* $A \in \mathcal{A}$ — это дифференциальная 1-форма на M, сопоставляющая каждому касательному вектору элемент алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G в представлении R. Если $\gamma : [0, 1] \to M$ — гладкий путь с началом и концом в точке $x \in M$, то $e^{\int_\gamma A}$ — элемент группы G, определяющий преобразование слоя $\mathbf{R}^N$ над точкой x, *голономия* пути γ относительно связности A.

Из связности можно изготовить 3-форму Черна-Саймонса на M; ее интегрирование по M дает *лагранжиан Черна–Саймонса*

$$\mathcal{L}(A) = \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A).$$

Выбор лагранжиана определяется требованием инвариантности его экспоненты $e^{i\mathcal{L}(A)}$ относительно действия *калибровочной группы*. Калибровочное преобразование это прибавление к связности дифференциала функции $M \to G$. Такой лагранжиан уже определяет инвариант трехмерного многообразия M, дающийся интегралом

$$W_R(A,k) = \int_{\mathcal{A}} e^{i\mathcal{L}(A)} dA$$

(если выписанному интегралу можно придать смысл). Интегрирование здесь идет по пространству орбит калибровочной группы.

Если в M дополнительно задан узел $k : S^1 \to M$, то подынтегральное выражение можно изменить, инкорпорировав в него голономию узла. В результате получается инвариант пары (многообразие, узел) вида

$$\int_{\mathcal{A}} e^{i\mathcal{L}(A)} W_R(A,k) dA.$$