Высший Колледж Математики

Инварианты графов и узлов
Задачи к экзамену

Количество очков за каждую задачу указано в скобках. Для сдачи экзамена необходимо набрать 50 очков.

1. (10) Назовем *триангуляцией* цикл на n вершинах, в котором проведены $n-3$ попарно "непересекающихся" "диагонали". Докажите, что хроматический многочлен триангуляции зависит только от числа вершин в ней и вычислите его.
2. (15) Ориентация ребер неориентированного графа называется *ациклической*, если она не содержит ориентированных циклов. Докажите теорему Стэнли: число ациклических ориентаций в графе равно значению его хроматического многочлена в точке -1.
3. (10) Вычислите значение универсального инварианта Татта на цикле с n вершинами.
4. (20) Докажите, что если $\varphi : A \to A$ — линейный гомоморфизм градуированных кокоммутативных коалгебр, $\varphi = 1 + \varphi_0$, то его логарифм
$$\log(\varphi) = \log(1+\varphi_0) = \varphi_0 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{3}\varphi_0^3 - \dots$$
отображает A в подпространство $P(A)$ примитивных элементов коалгебры A.
5. (20) Придумайте свой пример 4-инварианта графов.
6. (10) Подсчитав число фоксовых раскрасок, докажите, что узлы восьмерка и трилистник различны.
7. (10) Вычислите полином Джонса для узла-восьмерки при двух возможных ориентациях узла.
8. (20) Вычислите гомологии комплекса Хованова для узла-восьмерки.
9. (20) Докажите, что коранг матрицы примыканий графа пересечений хордовой диаграммы c равен уменьшенному на единицу числу компонент связности границы поверхности $S(c)$, полученной удвоением хорд в диаграмме c и приклейкой диска к внешней окружности.
10. (15) Докажите, что значение весовой системы, определяемой коэффициентом c_n полинома Конвея на хордовых диаграммах порядка n, равно 1, если число компонент связности границы поверхности $S(c)$ равно 1, и равно 0 в остальных случаях.
11. (15) Найдите какой-нибудь базис в пространстве хордовых диаграмм порядка 5.

12. (15+15) Вычислите на элементах найденного Вами при решении предыдущей задачи базиса значения

    a) полного sl(2)-инварианта;

    b) полного gl(1|1)-инварианта.

13. (15) Вычислите значения этих полных инвариантов на примитивных элементах, полученных в результате стандартной проекции элементов базиса на подпространство примитивных элементов.