С. В. Дужин

Многогранники и триангуляции

Лекция 1: Многогранники

Версия от 07,10.01

Если не оговорено противное, под многогранниками мы всюду понимаем выпуклые многогранники (определенные ниже).

Определение многогранника

Многогранники живут в вещественных аффинных пространствах, т.е. в пространствах $\mathbb{R}^d$, где точка 0 не считается выделенной.

Упражнение 1. Проверьте, что следующие понятия имеют аффинный смысл, т.е. не меняются при параллельных переносах:

Аффинная комбинация точек $a_1, \ldots, a_p$ — точка $c_1a_1 + \ldots + c_pa_p$, где c_i — действительные числа, в сумме равные 1.

Аффинная оболочка — множество всех аффинных комбинаций данных точек.

Аффинная зависимость. Точки $a_1, \ldots, a_p$ аффинно зависимы, если одна из них является аффинной комбинацией других, т.е. если найдутся такие числа c_i, не все равные нулю, что $c_1 + \ldots + c_p = 0$ и $c_1a_1 + \ldots + c_pa_p = 0$.

Выпуклая комбинация точек $a_1, \ldots, a_p$ — точка $c_1a_1 + \ldots + c_pa_p$, где c_i — неотрицательные числа, в сумме равные 1.

Выпуклая оболочка — множество всех выпуклых комбинаций данных точек.

Выпуклая зависимость. Точки $a_1, \ldots, a_p$ выпукло зависимы, если одна из них является выпуклой комбинацией других, т.е. если найдутся такие числа c_i, ровно одно из которых отрицательно, что $c_1 + \ldots + c_p = 0$, $c_1a_1 + \ldots + c_pa_p = 0$.

Два эквивалентных определения (выпуклого) многогранника

Определение 1. Многогранник — это выпуклая оболочка конечного набора точек в аффинном пространстве $\mathbb{R}^d$.

Определение 2. Многогранник — это пересечение конечного числа полупространств, если это пересечение ограничено.

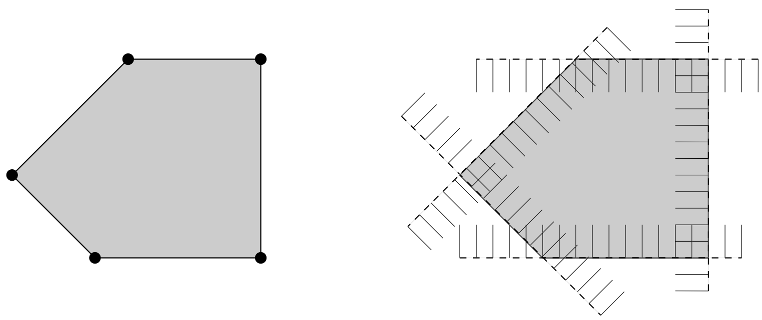

Рис. 1: Два определения многогранника

Тот факт, что эти два определения эквивалентны, выглядит довольно очевидным, хотя вразумительное доказательство не вполне тривиально. Удивительным является вот что. Зададимся таким вопросом: что такое многогранник общего положения? Иными словами: если выбрать случайным образом многогранник, то каким он будет? Или еще по-другому: какие свойства многогранника устойчивы относительно малых деформаций? Чтобы смысл этого вопроса стал яснее, приведем классический пример, связанный с гладкими функциями на прямой. В этом случае ответ таков: функции общего положения — это в точности морсовские функции, т.е. функции, у которых в нулях первой производной вторая производная не обращается в ноль. Случайно выбранная гладкая функция будет морсовской, причем при малом шевелении морсовской функции она остается в этом классе.

Для многогранников, начиная с трехмерных, аналогичный вопрос абсолютно нетривиален. Чтобы это понять, введем следующие определения.

Определение. Подмножество Q многогранника $P \subset \mathbb{R}^d$ называется его гранью, если существует линейная функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, ограничение которой на P неотрицательно, а множество нулей совпадает с Q. Иначе говоря, Q — это пересечение P с некоторым полупространством, не содержащим внутренних точек P.

Определение. Симплекс размерности d — это выпуклая оболочка набора из $d+1$ точек, аффинная оболочка которых имеет размерность d.

Любая грань симплекса является симплексом.

Определение. Пусть v — вершина многогранника P. Найдется линейная функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, неотрицательная во всех точках P и равная 0 только в вершине v. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in P \mid f(x) \leqslant \varepsilon\}$ называется *звездой* вершины v.

Определение. Многогранник называется симплициальным, если все его грани — симплексы, т.е. каждая грань старшей размерности имеет ровно d вершин.

Определение. Многогранник называется простым, если звезда любой его вершины является симплексом, т.е. каждая вершиня принадлежит ровно d граням старшей размерности.

На плоскости все многогранники просты и симплициальны. В трехмерном пространстве это уже не так. Например, куб прост, но не симплициален, а октаэдр, наоборот, симплициален, но не прост.

Вернемся теперь к вопросу о многогранниках общего положения. Если взять случайный набор точек, то их выпуклая оболочка будет, очевидно, симплициальным многогранником, ибо в пространстве $\mathbb{R}^d$ более чем d точек не могут случайно попасть в одну гиперплоскость. С другой стороны, если строить многогранник как пересечение случайного набора полупространств, то звезда любой вершины будет симплексом, ибо не может такого случиться, чтобы пересеклись в одной точке более чем d случайным образом выбранных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$.

Таким образом, многогранник общего вида — это, с одной стороны, симплициальный многогранник, а с другой стороны простой. Следовательно, это симплекс!

Задача. Докажите, что в пространстве размерности $d \geqslant 3$ только симплекс одновременно симплициален и прост.

Полученное кажущееся противоречие означает, что две естественные меры на пространстве многогранников, связанные с их заданием вершинами и гранями, “перпендикулярны"друг другу. Таким образом, нет смысла говорить о многогранниках “общего положения", а есть смысл о простых или о симплициальных многогранниках.

Примеры многогранников

1. Симплекс Δ_d определен выше. *Стандартный* симплекс размерности d — это выпуклая оболочка единичных базисных векторов $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ в $\mathbb{R}^{d+1}$.

2. Куб Q_d — выпуклая оболочка 2^d точек в $\mathbb{R}^d$, координаты которых — произвольные наборы нулей и единиц.

3. Крестовый многогранник X_d — выпуклая оболочка $2d$ точек в $\mathbb{R}^d$, лежащих на осях координат и отстоящих на расстояние 1 от начала координат.

4. Циклический многогранник $C_d(n)$ — выпуклая оболочка n точек в $\mathbb{R}^d$, лежащих на кривой $(t, t^2, ..., t^d)$ (от конкретного выбора точек комбинаторный тип многогранника не зависит).

Конструкции многогранников

1. Прямое произведение — в обычном декартовом смысле: $P \subset \mathbb{R}^d$, $Q \subset \mathbb{R}^e \Longrightarrow P \times Q \subset \mathbb{R}^{d+e}$,

2. Пирамида $\mathrm{pyr}(P) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — выпуклая оболочка P и точки, лежащей вне аффинной оболочки P.

3. Бипирамида $\mathrm{bipyr}(P) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — выпуклая оболочка P и отрезка, пересекающего P во внутренней точке.

4. Джойн $P * Q$ — выпуклая оболочка объединения $P \cup Q$, расположенных в общем пространстве таким образом, что никакие два отрезка $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$, где $p_i \in P$, $q_i \in Q$, не имеют общих внутренних точек. (Чтобы этого достичь, достаточно положить P и Q на две скрещивающиеся плоскости в пространстве размерности $\dim P + \dim Q + 1$.)

Комбинаторная эквивалентность и комбинаторная двойственность

Определение. *Решетка граней* многогранника P — это частично упорядоченное множество: состоящее из всех граней P с отношением теоретико-множественного включения.

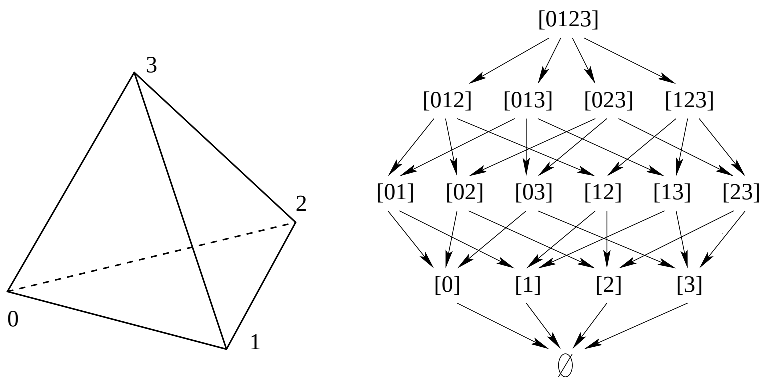

Рис. 2: Симплекс Δ_3 и его решетка

Определение. Два многогранника комбинаторно эквивалентны, если их решетки изоморфны как частично упорядоченные множества.

Определение. Два многогранника комбинаторно двойственны, если их решетки антиизоморфны, т.е. существует взаимно однозначное соответствие

Двойственные многогранники должны иметь одинаковую размерность d, причем k-грани одного из них соответствуют $(d-1-k)$-граням другого.

Задача. Докажите, что многогранники $\Delta_2 \times \Delta_2$ (квадрат треугольника) и $C_4(6)$ (циклический) комбинаторно двойственны.

Уравнения Дена-Соммервиля

Определение. Обозначим через $f_k(P)$ число граней многогранника P размерности k. Последовательность $(f_{-1}, f_0, ..., f_d)$ называется f-вектором многогранника P. Числа $f_{-1} = f_d = 1$ отвечают несобственным граням (пустое подмножество и весь многогранник.)

Теорема (*уравнение Эйлера*). Для любого выпуклого многогранника P

$$\sum_{i=-1}^{d} (-1)^i f_i(P) = 0.$$

Теорема (*уравнения Дена–Соммервиля*). Для простого многогранника P и любого $k = 0, ..., d$

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d-i}{d-k} f_i(P) = f_k(P).$$