С. В. Дужин

Многогранники и триангуляции

Лекция 2: Триангуляции

Версия 07.10.01

Определение. Набор $\mathcal{P}$ многогранников (разных размерностей), лежащих в одном пространстве $\mathbb{R}^d$, называется полиэдральным комплексом, если (1) вместе с любым многогранником $\mathcal{P}$ содержит все его грани, (2) пересечение любых двух многогранников из $\mathcal{P}$ является гранью каждого из них.

Определение. Триангуляцией многогранника P называется полиэдральный комплекс, состоящий из симплексов, объединение которых совпадает с P.

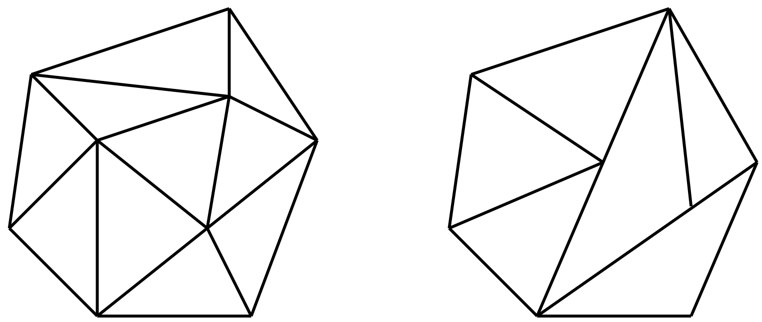

Рис. 1: Триангуляция и разбиение, не являющееся триангуляцией

Определение. Пусть A — конечный набор точек в $\mathbb{R}^d$. Трингуляцией, подчиненной набору A, называется триангуляция T выпуклой оболочки $Q = \mathrm{Conv}(A)$ множества A, такая что вершины всех симплексов из T принадлежат A. (При этом некоторые точки A могут не быть вершинами никакого симплекса.)

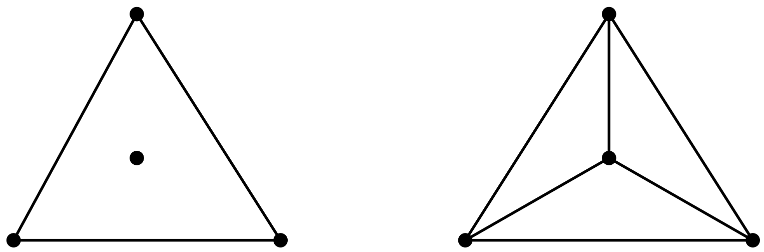

Рис. 2: Две триангуляции, подчиненные множеству из 4 точек плоскости

Множество всех триангуляций, подчиненных A, мы будем обозначать $\mathrm{Triang}(A)$. Это множество допускает два различных компактных описания: в терминах *вторичного многогранника* Гельфанда–Зелевинского–Капранова [1] и при помощи *преобразования Гейла* (Billera–Filiman–Sturmfels [2]). Прежде чем приступать к изложению общих конструкций, рассмотрим один частный пример: *аффинные цепи*.

Определение. Конечное множество в аффинном пространстве называется цепью, если любое его собственное подмножество аффинно независимо, а множество в целом аффинно зависимо.

Легко понять, что в пространстве $\mathbb{R}^d$ цепь A состоит из $d+2$ точек a_i, из которых любая $d+1$ точка лежат в вершинах симплекса полной размерности. Аффинная зависимость между этими точками имеет вид $\sum c_i a_i = 0$, причем все коэффициенты c_i ненулевые (иначе аффинная зависимость возникла бы среди точек меньшего множества). Если число плюсов p, а число минусов q, то говорят, что (p,q) — *сигнатура* цепи A. Поскольку можно сделать общую замену знака, сигнатура определена с точностью до перестановки p и q. Например, на рисунке изображена цепь сигнатуры $(3,1)$.

Сигнатура есть численное выражение естественного разбиения цепи A на два подмножества: A_+ (с положительными коэффициентами c_i) и A_- (с отрицательными коэффициентами c_i) — опять же, с точностью до перестановки.

Теорема. Всякая цепь A имеет ровно две триангуляции, явно описываемые следующим образом:

$$\begin{aligned} T_+ &= \{\mathrm{Conv}(A \setminus a) \mid a \in A_+\}, \\ T_- &= \{\mathrm{Conv}(A \setminus a) \mid a \in A_-\}. \end{aligned}$$

Две триангуляции цепи суть две вершины ее *вторичного многогранника*, представляющего собой в этом частном случае прямолинейный отрезок.

Общая конструкция вторичного многогранника основана на понятии характеристической функции триангуляции.

Определение. Пусть T — триангуляция, подчиненная точечному множеству A. Характеристическая функция триангуляции T — это функция на множестве A, значение которой в каждой точке равна сумме объемов всех симплексов триангуляции T, для которых данная точка является вершиной:

$$\chi_T(a) = \sum_{\sigma \in T \,:\, a \in \mathrm{Vert}(\sigma)} \mathrm{Vol}(\sigma).$$

Обозначим через $\mathbb{R}^A$ пространство функций на множестве A. Это пространство, разумеется, изоморфно стандартному пространству $\mathbb{R}^n$, где $n = |A|$, но для наших целей существенно помнить его геометрический смысл.

Определение. Вторичный многогранник точечного множества A — это выпуклая оболочка характеристических функций χ_T всевозможных триангуляций $T \in \mathrm{Triang}(A)$.

Если действовать на основе определения, то, чтобы найти вторичный многогранник, нужно вначале найти все триангуляции. Преобразование Гейла дает способ описать вторичный многогранник, не зная всех триангуляций, и, находить триангуляции, соответствующие вершинам вторичного многогранника. Такие триангуляции называются *регулярными*, иоли *когерентными*.

Определение. Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — выпуклая кусочно-аффинная функция. Выпуклая оболочка ее надграфика

$$G^+(f) = \{(a,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(a)\}$$

представляет собой неограниченное полиэдральное множество в $\mathbb{R}^{d+1}$. Все его грани составляют полиэдральный комплекс. Рассматривая проекции ограниченных полиэдров этого комплекса (т.е. многогранников) в $\mathbb{R}^d$, мы получим комплекс многогранников в

$\mathbb{R}^d$. Такие комплексы называются регулярными. В частности, триангуляция называется регулярной, если ее можно получить посредством такой конструкции.

Пример–теорема. Триангуляция Делоне множества A регулярна.

Теорема. Триангуляция регулярна тогда и только тогда, когда она отвечает вершине вторичного многогранника.

Если задана триангуляция T, подчиненная множеству A, то всякая функция $f \in \mathbb{R}^A$ порождает кусочно-аффинную функцию $\varphi_{f,T}$ на многограннике $Q = \mathrm{Conv}(A)$, принимающую данные значения $f(a)$ в точках множества $A \subset Q$ и аффинную на каждом симплексе $\sigma \in T$.

Определение. Конус триангуляции T:

$$C_T = \{f \in \mathbb{R}^A \mid \text{ функция } \varphi_{f,T} \text{ выпукла и } \varphi_{f,T}(a) \leqslant f(a) \text{ для всех } a \in A\}.$$

Определение. Вторичный веер множества A:

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{C}_\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \in \mathrm{Triang}(\mathcal{A})\}.$$

Легко понять, что веер $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ покрывает все пространство $\mathbb{R}^A$, так как всякая функция общего положения $f \in \mathbb{R}^A$ задает некоторую триангуляцию.

Определение. Нормальный веер многогранника P — это набор конусов N_v, отвечающих вершинам $v \in \mathrm{Vert}(P)$, где

$$N_v = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x, v) \leqslant (x, p) \text{ для всех } p \in P\}.$$

Теорема. Вторичный веер совпадает с нормальным веером вторичного многогранника.

Для точечного множества $A \subset \mathbb{R}^d$ пространство $\mathbb{R}^A$ естественным разлагается в прямую сумму двух подпространств:

$$\mathbb{R}^A = V(A) \oplus D(A),$$

где $V(A)$ — подпространство, состоящее из ограничений на A всех глобальных аффинных функций $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, а $D(A)$ — пространство аффинных зависимостей между точками A:

$$D(A) = \{f \in \mathbb{R}^A \mid \sum_{a \in A} f(a) = 0, \ \sum_{a \in A} f(a)a = 0\}.$$

Если $A \subset \mathbb{R}^d$ — множество полного аффинного ранга, т.е. не содержится ни в какой гиперплоскости, и $|A| = n$, то $\dim V(A) = d + 1$, $\dim D(A) = n - d - 1$.

В вопросах, которыми мы интересуемся, $V(A)$ играет роль тривиального подпространства (в частности, оно содержится в любом конусе C_T), и вся содержательная информация без вырождения проецируется в подпространство $D(A)$.

Обозначим через $\mathbf{B} : \mathbb{R}^A \to D(A)$ проекцию вдоль указанного прямого разложения.

Определение. Преобразованием Гейла точечной конфигурации A называется множество векторов $\{\mathbf{B}(e_a)\}_{a\in A}$, где $e_a \in \mathbb{R}^A$ — базисная функция, равная 1 в точке a и 0 во всех прочих точках A.

Теорема. Регулярные триангуляции множества A взаимно-однозначно отвечают конусам полной размерности веера $\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ в пространстве $D(A)$, который строится следующим образом.

1. Найдем преобразование Гейла $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ данной точечной конфигурации $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

2. Для всякого подмножества $b_{\mu_1}, \dots, b_{\mu_{n-d-1}}$, являющегося базисом $D(A)$, построим коническую оболочку $C_\mu = \mathrm{Cone}\{b_{\mu_1}, \dots, b_{\mu_{n-d-1}}\}$.

3. Составим веер $\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ из всевозможных (кратных) пересечений всех конусов C_μ, где μ отвечает наборам векторов b, составляющих базис пространства $D(A)$.

Список литературы

[1] I. M. Gel'fand, A. V. Zelevinsky and M. M. Kapranov, *Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polyhedra*, Leningrad Math. J. **2** (1991) 449–505.

[2] L. J. Billera, P. Filliman and B. Sturmfels, *Constructions and complexity of secondary polytopes*, Advances in Math. **83** (1990) 155–179.