Экзамен по курсу
«Введение в теорию чисел
и алгебраическую геометрию»
Осенний семестр 2001 года
Решения задач сдавать в письменном виде в ком. 211
(в ячейку С. М. Львовского)
до 11 декабря 2001 года включительно
Не забудьте подписать работу!

1. k — поле конечной характеристики p, $a \in k$. Докажите, что многочлен $X^p - X - a$ либо неприводим над k, либо раскладывается над этим полем на линейные множители.

2. $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Докажите, что $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

3. Найдите кольцо целых в поле $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{p})$, где p — простое число.

4. K — поле, полученное присоединением к $\mathbb{Q}$ корня многочлена

$$x^3 - 3x + 1.$$

Опишите закон разложения простых чисел в кольце целых поля K.

5. Найдите группу Галуа над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена

$$x^4 + 2x^2 + x + 3$$

(поле разложения получается, по определению, присоединением всех корней многочлена).

6*. Сколько решений имеет уравнение $y^2 = x^4 - 1$ над полем из 3^n элементов?