А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Гамильтоновы структуры и эволюционные уравнения*

Листок 1. Пуассоновы многообразия

Пусть M — гладкое многообразие.

Определение 1. Если на $C^\infty(M)$ задана билинейная операция $\{\cdot\,,\cdot\}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, которая удовлетворяет требованию кососкоммутативности

$$\{f,g\}=-\{g,f\},$$

тождеству Якоби

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0$$

и правилу Лейбница

$$\{fg,h\}=f\{g,h\}+g\{f,h\},$$

то многообразие M называется *пуассоновым*, алгебра $C^\infty(M)$ — *пуассоновой алгеброй*, а операция $\{\cdot\,,\cdot\}$ — *скобкой Пуассона.*

Задача 1. Как бы Вы определили пуассонову структуру на декартовом произведении $M_1\times M_2$ двух пуассоновых многообразий?

Задача 2. Покажите, что пуассонова структура однозначно определяется морфизмом линейных расслоений $J\colon T^*(M)\to T(M)$, $(J_x(df_x))(g)=\{f,g\}(x)$, где $x\in M$, который можно рассматривать как *бивектор*, т. е. $J\in\Lambda^2(T(M))=T(M)\wedge T(M)$.

Задача 3. Убедитесь, что в локальных координатах скобка Пуассона записывается в виде $\{f,g\}=\sum_{ij}\{x_i,x_j\}\,\partial f/\partial x_i\,\partial g/\partial x_j$. Выпишите в терминах базисных скобок $\{x_i,x_j\}$ (называемых *структурными функциями* пуассонова многообразия)

1) матрицу оператора J;
2) условие кососимметричности скобки Пуассона;
3) тождество Якоби.

Задача 4. Покажите, что функции $f_{ij}=a_{ij}x_ix_j$, где $\|a_{ij}\|$ — кососимметрическая числовая матрица, являются структурными функциями некоторой пуассоновой структуры на $\mathbb{R}^n$.

Задача 5. Тот же вопрос для пространства $\mathbb{R}^3$ и функций $f_{12}=|x|^2\,x_3$, $f_{23}=|x|^2\,x_1$, $f_{31}=|x|^2\,x_2$.

---

*Рекомендуемая дополнительная литература:

[1] *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика, М.: Факториал, 1997.

[2] А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик, *Гомологические методы в геометрии дифференциальных уравнений*, записки лекций, `http://www.mccme.ru/ium/s99/GeoDiffEq.htmlhttp://www.mccme.ru/ium/s99/GeoDiffEq`

[3] А. М. Виноградов, Б. А. Купершмидт, *Структура гамильтоновой механики*, УМН, т. 32, вып. 4, 1977, с. 175–236.

[4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1989.

[5] *Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Том.* 4. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985.

[6] J. E. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1999, `http://www.cds.caltech.edu/~marsden/courses/CDS241/MS.BOOK.pdf`, `http://www.cds.caltech.edu/~marsden/courses/CDS241/MS_II.pdf`, см. также `http://www.cds.caltech.edu/~marsden/books/node18.html`

О п р е д е л е н и е 2. Пуассонова скобка задает на $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли и гомоморфизм этой алгебры Ли в алгебру Ли $\mathrm{D}(M)$ векторных полей полей на M: $f \mapsto X_f \in \mathrm{D}(M)$, где $X_f(g) = \{f, g\}$, $f \in C^\infty(M)$. Поле вида X_f называется *гамильтоновым* полем с *гамильтонианом* f. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = X_f(x)$ называется системой *уравнений Гамильтона.*

З а д а ч а 6. Докажите тождество $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$.

З а д а ч а 7. Обозначим через $\mathrm{D}_k(M) = \underbrace{\mathrm{D}(M) \wedge \mathrm{D}(M) \wedge \ldots \wedge \mathrm{D}(M)}_{k \text{ раз}}$ пространство кососимметричных поливекторных полей на M. Оператор J из Задачи 2 индуцирует гомоморфизм внешних алгебр $J\colon \Lambda^*(M) \to \mathrm{D}_*(M) = \sum_k \mathrm{D}_k(M)$. Проверьте равенство

$$J(\omega)(f_1, \ldots, f_k) = (-1)^k \omega(X_{f_1}, \ldots, X_{f_k}).$$

О п р е д е л е н и е 3. Векторное поле $X \in \mathrm{D}(M)$ на пуассоновом многообразии называется *пуассоновым*, если оно сохраняет пуассонову структуру, т. е. $X(J) = 0$.

З а д а ч а 8. Докажите, что гамильтоновы поля образуют идеал в алгебре Ли пуассоновых полей. Фактор пуассоновых полей по гамильтоновым называется *первой группой пуассоновых когомологий.*

Замечание 1. *Нулевая группа пуассоновых когомологий* состоит из *функций Казимира*, т. е. таких функций $f \in C^\infty(M)$, что $X_f = 0$. Иными словами, нулевая группа пуассоновых когомологий совпадает с центром пуассоновой алгебры $C^\infty(M)$.

О п р е д е л е н и е 4. Ранг отображения J_x называется *рангом* пуассоновой структуры в точке $x \in M$. (То есть ранг равен размерности пространства, состоящего из векторов гамильтоновых полей в точке x.) Если ранг всюду равен $\dim M$, то M называется *симплектическим* многообразием. 2-форма Ω определяемая равенством $\Omega_x(\xi, \eta) = (J_x^{-1}(\eta))(\xi)$, ξ, $\eta \in T_x(M)$, называется *симплектической формой.*

З а д а ч а 9. Проверьте равенство $\Omega(X_f, X_g) = \{f, g\}$.

З а д а ч а 10. Докажите, что размерность симплектического многообразия обязательно четна.

З а д а ч а 11. Докажите, что невырожденная 2-форма является симплектической тогда и только тогда, когда она замкнута, $d\Omega = 0$. Приведите пример симплектической формы, не являющейся точной.

З а д а ч а 12. Докажите, что на сфере S^4 невозможно ввести симплектическую структуру.

З а д а ч а 13. Вычислите нулевую и первую группы пуассоновых когомологий произвольного симплектического многообразия.

З а д а ч а 14 (теорема Дарбу). Пусть в точке $x \in M$ пуассонова многообразия M ранг пуассоновой структуры локально постоянен и равен $2r$. Докажите, что в окрестности x существуют такие координаты $q_1, \ldots, q_r$, $p_1, \ldots, p_r$, $z_1, \ldots, z_l$, что

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij},\ \{q_i, q_j\} = 0,\ \{p_i, p_j\} = 0,\ \{z_i, z_j\} = 0,\ \{z_i, q_j\} = 0,\ \{z_i, p_j\} = 0.$$

З а д а ч а 15. Пусть $\pi\colon T^*(M) \to M$ — кокасательное расслоение. Определим 1-форму $\rho \in \Lambda^1(T^*(M))$ равенством $\rho(\xi) = \langle \pi_*(\xi), \theta \rangle$, где $\xi \in T_\theta(T^*(M))$, $\theta \in T^*(M)$. Докажите, что форма $\Omega = d\rho$ — симплектическая. Опишите ее в координатах.

Чему равно ограничение $s_\omega^*(\rho)$ формы ρ на сечение $s_\omega\colon M \to T^*(M)$, отвечающее некоторой 1-форме $\omega \in \Lambda^1(M)$?

О п р е д е л е н и е 5. Пуассонова структура на векторном пространстве называется *линейной*, если скобка Пуассона линейных функций снова линейна.

З а д а ч а 16 (скобка Ли-Пуассона). Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли. Докажите, что на $\mathfrak{g}^*$ существует единственная такая линейная пуассонова структура, что ограничение скобки Пуассона на линейные функции совпадает со скобкой Ли на $\mathfrak{g}$. Найдите координатное описание этой пуассоновой структуры в терминах структурных констант исходной алгебры Ли.

З а д а ч а 17 (симплектическое слоение). Докажите, что если ранг пуассоновой структуры постоянен, то гамильтоновы поля образуют вполне интегрируемое распределение. Проверьте, что ограничения скобки Пуассона на каждое интегральное многообразие этого распределения задает на нем симплектическую структуру.

Замечание 2. Можно показать, что любое пуассоново многообразие разбивается на *симплектические слои* (*листы*), вообще говоря, различных размерностей.

З а д а ч а 18. Убедитесь, что симплектические слои скобки Ли-Пуассона суть орбиты коприсоединенного представления соответствующей группы Ли в $\mathfrak{g}^*$.

З а д а ч а 19 (линейная аппроксимация пуассоновой структуры). Докажите, что на касательном пространстве $T_x(M)$ в точке x нулевого ранга на пуассоновом многообразии M формула $\{d_x f, d_x g\} = d_x\{f, g\}$ задает пуассонову структуру.

З а д а ч а 20. Докажите, что скобка Пуассона корректно сужается на подмногообразие тогда и только тогда, когда все гамильтоновы поля касаются этого подмногообразия (или, равносильно, когда это подмногообразие является объединением симплектических слоев).

З а д а ч а 21 (скобка Дирака). Рассмотрим такое подмногообразие $N \subset M$ симплектического многообразия M, что $X_f \notin T_x(N)$ для всех $x \in N$ и таких функций $f \in C^\infty(M)$, что $f|_N = 0$. Докажите, что ограничение $\Omega|_N \in \Lambda^2(N)$ симплектической формы $\Omega \in \Lambda^2(M)$ снова является симплектической формой.

Пусть подмногообразие N задано уравнениями $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Покажите, что скобка Пуассона на N, отвечающая симплектической форме $\Omega|_N$ имеет вид

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} + \sum_{ij} c_{ij}\{f_i, f\}\{f_j, g\}, \tag{1}$$

где $\|c_{ij}\| = \|\{f_i, f_j\}\|^{-1}$.

З а д а ч а 22 (скобка Дирака). Рассмотрим такой набор функций f_i, $i = 1, \dots, k$, на пуассоновом многообразии M, что матрица $\|\{f_i, f_j\}\|$ невырождена. Докажите, что формула (1) задает на всем M новую скобку Пуассона.

Подсказка. Если сейчас эта задача не решается, вернитесь к ней после Задачи 31.

З а д а ч а 23 (скобка Схоутена). В пространстве $\mathrm{D}_*(M) = \sum_k \mathrm{D}_k(M)$ имеется операция — *скобка Схоутена*: $[\![\cdot\,, \cdot]\!]\colon \mathrm{D}_k(M) \times \mathrm{D}_l(M) \to \mathrm{D}_{k+l-1}(M)$. Докажите, что следующие 4 определения скобки Схоутена равносильны:

О п р е д е л е н и е 6. *Скобка Схоутена* — единственная билинейная, кососимметричная ($[\![\alpha, \beta]\!] = -(-1)^{(k-1)(l-1)}[\![\beta, \alpha]\!]$, $\alpha \in \mathrm{D}_k(M)$, $\beta \in \mathrm{D}_l(M)$) скобка, удовлетворяющая правилу Лейбница

$$[\![\alpha, \beta \wedge \gamma]\!] = [\![\alpha, \beta]\!] \wedge \gamma + (-1)^{(k-1)l}\beta \wedge [\![\alpha, \gamma]\!]$$

(где опять $\alpha \in \mathrm{D}_k(M)$, $\beta \in \mathrm{D}_l(M)$), а в случае обычных векторных полей ($k = l = 1$) совпадающая с коммутатором.

О п р е д е л е н и е 7.
$$[\![X_1\wedge\ldots\wedge X_k, Y_1\wedge\ldots\wedge Y_l]\!] = \sum_{ij}(-1)^{i+j}[X_i,Y_j]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_i\wedge\ldots\wedge X_k\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge\hat{Y}_j\wedge\ldots\wedge Y_l,$$

где X_i, $Y_j\in \mathrm{D}_1(M)$. Кроме того, для $f\in C^\infty(M)$
$$[\![X_1\wedge\ldots\wedge X_k, f]\!] = (-1)^k[\![f, X_1\wedge\ldots\wedge X_k]\!] = \sum_{i=1}^k(-1)^{k+i}X_i(f)X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_i\wedge\ldots\wedge X_k.$$

О п р е д е л е н и е 8. Будем рассматривать поливекторы как полидифференцирования алгебры функций. Пусть $\alpha\in\mathrm{D}_k(M)$ и $f\in C^\infty(M)$. Обозначим через $\alpha(f)\in\mathrm{D}_{k-1}(M)$ полидифференцирование, полученное подстановкой функции f на последнее (крайнее справа) место. *Скобка Схоутена* определяется по индукции:
$$[\![X,f]\!]=X(f),\qquad [\![f,X]\!]=-X(f),\qquad [\![\alpha,\beta]\!](f)=[\![\alpha,\beta(f)]\!]+(-1)^{l-1}[\![\alpha(f),\beta]\!],$$
где $X\in\mathrm{D}(M)$, $\alpha\in\mathrm{D}_*(M)$, $\beta\in\mathrm{D}_l(M)$, $f\in C^\infty(M)$.

О п р е д е л е н и е 9. Используя обозначениях предыдущего определения, зададим *скобку Схоутена* равенством
$$[\![\alpha,\beta]\!](f_1,\ldots,f_{k+l-1}) = \sum_{\sigma\in S^l_{k+l-1}}(-1)^\sigma\alpha(\beta(f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(l)}),f_{\sigma(l+1)},\ldots,f_{\sigma(k+l-1)})]\!] -$$
$$-(-1)^{(k-1)(l-1)}\sum_{\sigma\in S^k_{k+l-1}}(-1)^\sigma\beta(\alpha(f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(k)}),f_{\sigma(k+1)},\ldots,f_{\sigma(k+l-1)})]\!],$$

где S^i_n — подмножество симметрической группы S_n, состоящее из таких перестановок σ, что $\sigma(1)<\sigma(2)<\ldots<\sigma(i)$ и $\sigma(i+1)<\sigma(i+2)<\ldots<\sigma(n)$.

З а д а ч а 24. Докажите, что скобка Схоутена удовлетворяет градуированному тождеству Якоби
$$[\![\alpha,[\![\beta,\gamma]\!]]\!] = [\![[\![\alpha,\beta]\!],\gamma]\!] + (-1)^{(k-1)(l-1)}[\![\beta,[\![\alpha,\gamma]\!]]\!],$$
где $\alpha\in\mathrm{D}_k(M)$, $\beta\in\mathrm{D}_l(M)$, $\gamma\in\mathrm{D}_*(M)$.

З а д а ч а 25. Проверьте, что бивектор P задает пуассонову структуру тогда и только тогда, когда $[\![P,P]\!]=0$.

З а д а ч а 26. Докажите, что если $P\in\mathrm{D}_2(M)$ — пуассонова структура, то последовательность
$$0\to C^\infty(M)\to\mathrm{D}_1(M)\xrightarrow{\partial_P}\mathrm{D}_2(M)\xrightarrow{\partial_P}\ldots\xrightarrow{\partial_P}\mathrm{D}_i(M)\xrightarrow{\partial_P}\mathrm{D}_{i+1}(M)\xrightarrow{\partial_P}\ldots\xrightarrow{\partial_P}\mathrm{D}_n(M)\to 0$$

где $\partial_P(\alpha)=[\![P,\alpha]\!]$, является комплексом. Его когомологии называются *пуассоновыми когомологиями*. Вычислите пуассоновы когомологии симплектического многообразия.

З а д а ч а 27. Убедитесь, что скобка Схоутена индуцирует скобку на пуассоновых когомологиях. Покажите, что на симплектическом многообразии такая индуцированная скобка тривиальна.

З а д а ч а 28. Докажите, что на пространстве дифференциальных форм на пуассоновом многообразии существует единственная билинейная скобка
$$[\![\cdot\,,\cdot]\!]\colon\Lambda^k(M)\times\Lambda^l(M)\to\Lambda^{k+l-1}(M),$$

такая что $[\![df,g]\!]=\{f,g\}$, $[\![df,dg]\!]=d\{f,g\}$,

$$[\![\omega_1,\omega_2]\!]=-(-1)^{(k_1-1)(k_2-1)}[\![\omega_2,\omega_1]\!],\qquad \omega_i\in\Lambda^{k_i}(M),\ i=1,\ 2,$$

$$[\![\omega_1,\omega_2\wedge\omega_3]\!]=[\![\omega_1,\omega_2]\!]\wedge\omega_3+(-1)^{(k_1-1)k_2}\omega_2\wedge[\![\omega_1,\omega_3]\!].$$

Как эта скобка связана со скобкой Схоутена?

Задача 29. Покажите, что если 2-форма ω на пуассоновом многообразии удовлетворяет условию $[\![\omega,\omega]\!]=0$, то скобка $\{f,g\}_\omega=\omega(X_f,X_g)$, $f,\ g\in C^\infty(M)$, является скобкой Пуассона.

Задача 30. Пусть ω — внешняя 2-форма на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Сформулируйте условие, при котором скобка $\{\cdot\,,\cdot\}_\omega$ на $\mathfrak{g}^*$ является скобкой Пуассона.

Задача 31 (скобка Дирака). Покажите, что если 2-форма ω на пуассоновом многообразии удовлетворяет условию

$$d\omega-\tfrac{1}{2}[\![\omega,\omega]\!]=0,\tag{2}$$

то скобка $\{f,g\}_D=\{f,g\}+\omega(X_f,X_g)$, $f,\ g\in C^\infty(M)$, является скобкой Пуассона.

Рассмотрим такой набор функций $f_1,\dots,f_k$ на пуассоновом многообразии M, что матрица $\|\{f_i,f_j\}\|$ невырождена. Пусть $\|c_{ij}\|=\|\{f_i,f_j\}\|^{-1}$. Покажите, что форма $\omega=1/2\sum_{ij}c_{ij}\,df_i\wedge df_j$ удовлетворяет уравнению (2). Убедитесь, что скобка $\{\cdot\,,\cdot\}_D$ задается формулой (1) из Задачи 21 (см. также Задачу 22).

Определение 10. Рассмотрим гамильтоново поле X_H с гамильтонианом H. Функция f называется *первым интегралом* (*законом сохранения*) гамильтоновой системы $\dot x=X_H(x)$, если $X_H(f)=0$.

Задача 32. Предположим, что система с гамильтонианом H на $2n$-мерном симплектическом многообразии имеет n функционально независимых первых интегралов f_i в инволюции (т. е. $\{f_i,f_j\}=0$). Докажите, что гамильтонова система $\dot x=X_H(x)$ интегрируется в квадратурах[†].

Подсказка. Начните с решения следующей задачи.

Задача 33. Пусть на произвольном n-мерном многообразии даны n независимых коммутирующих векторных полей X_i, $[X_i,X_j]=0$. Покажите, что система $\dot x=X_1(x)$ интегрируема в квадратурах.

Подсказка. Рассмотрите в пространстве 1-форм базис, двойственный к базису $X_1,\dots,X_n$.

Определение 11. Пусть на многообразии M заданы две пуассоновы структуры P и Q. Они образуют *пуассонову пару*, если все их линейные комбинации $\lambda P+\mu Q$ — также пуассоновы структуры.

Задача 34. Докажите, что пуассоновы структуры P и Q образуют пуассонову пару тогда и только тогда, когда $[\![P,Q]\!]=0$.

Задача 35 (схема Магри). Пусть на многообразии M задана пуассонова пара P, Q, причем первая группа Q-пуассоновых когомологий тривиальна. Предположим также, что имеется P-гамильтоново поле X с гамильтонианом f_0, которое сохраняет Q (т. е. производная Ли от Q вдоль X равна нулю). Покажите, что существует такая последовательность функций f_i, $i=0,\ 1,\ 2,\dots$ на M, что

1) поле с P-гамильтонианом f_i совпадает с полем, отвечающем Q-гамильтониану f_{i+1};
2) функции f_i находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона.

[†]т. е. ее решения — интегральные кривые поля X_H — можно найти с помощью конечного числа алгебраических и дифференциальных операций, включая обращение диффеоморфизмов, и вычисления интегралов известных функций (квадратур).