А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Листок 2. Расслоения джетов

Пусть $E \to M$ — векторное расслоение над многообразием M, $\dim M = n$ и $\Gamma(\pi)$ — множество его сечений.

Определение 1. Класс эквивалентности сечений $s \in \Gamma(\pi)$, имеющих в точке $x \in M$ одинаковые частные производные всех порядков, называется *джетом* (или *струей*) сечения s в точке x и обозначается через $j_\infty(s)(x)$.

Задача 1. Пусть $J^\infty(\pi) = \{j_\infty(s)(x) \mid s \in \Gamma(\pi),\ x \in M\}$. Покажите, что отображение $\pi_\infty \colon J^\infty(\pi) \to M$, $\pi_\infty(j_\infty(s)(x)) = x$ является гладким векторным расслоением, а $j_\infty(s)\colon M \to J^\infty(\pi)$ — его сечениями. Убедитесь, что если $x_1, \dots, x_n$, $u^1, \dots, u^m$ — координаты, соответственно, на базе и в слое расслоения π, то функции u^j_σ, определяемые равенствами

$$u^j_\sigma(j_\infty(s)(x)) = \frac{\partial^{|\sigma|}(u^j \circ s)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}},$$

где $\sigma = i_1 \dots i_s$ и $|\sigma| = s$, суть координаты в слое расслоения π_∞.

Задача 2. Рассмотрим точку $\theta = j_\infty(s)(x) \in J^\infty(\pi)$ (сечение $s \in \Gamma(\pi)$ определено неоднозначно). Убедитесь, что n-мерная плоскость $\mathscr{C}_\theta = (j_\infty(s))_*(T_x(M)) \subset T_\theta(J^\infty(\pi))$ не зависит от выбора s. Докажите, что распределение $\theta \mapsto \mathscr{C}_\theta$, называемое *распределением Картана*, вполне интегрируемо в том смысле, что если векторные поля X и Y лежат в $\mathscr{C}$, то и их коммутатор $[X, Y]$ лежит в $\mathscr{C}$. Покажите, что теорема Фробениуса для распределения Картана неверна.

Задача 3. Докажите, что локально распределение Картана порождается *полными производными* $D_i = \partial/\partial x_i + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma i}\partial/\partial u^j_\sigma$, а модуль 1-форм $\mathscr{C}\Lambda^1 \subset \Lambda^1 = \Lambda^1(J^\infty(\pi))$, аннулирующий распределение Картана, порождается формами $\omega^j_\sigma = du^j_\sigma - \sum_i u^j_{\sigma i}\, dx_i$.

Задача 4. Докажите, что n-мерные интегральные многообразия распределения Картана имеют вид $j_\infty(s)(\mathscr{U})$, $s \in \Gamma(\pi)$, $\mathscr{U} \subset M$.

Определение 2. Ниже мы рассматриваем $C^\infty(J^\infty(\pi))$-модули сечений различных векторных расслоений над пространством $J^\infty(\pi)$. Договоримся, что термин *модуль* будет всегда обозначать модуль описанного типа. Модуль P называется *горизонтальным*, если он является модулем сечений некоторого индуцированного расслоения, т. е. $P = \Gamma(\pi^*_\infty(\xi))$ для какого-то векторного расслоения $\xi\colon N \to M$.

Задача 5. Покажите, что каждый элемент $f \in P$ горизонтального модуля $P = \Gamma(\pi^*_\infty(\xi))$ можно отождествить с таким нелинейным дифференциальным оператором $\nabla_f \colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$, что $\nabla_f(s) = j_\infty(s)^*(f)$. Какому элементу при этом отвечает композиция операторов $\nabla_f \circ \nabla_g$?

Задача 6. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор $\nabla \colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$. Определим его *поднятие* $\hat\nabla \colon P_1 \to P_2$, $P_i = \Gamma(\pi^*_\infty(\xi_i))$ на $J^\infty(\pi)$ равенствами $\hat\nabla(f) = g$, $\nabla_g = \nabla \circ \nabla_f$. Опишите $\hat\nabla$ в координатах.

О п р е д е л е н и е 3. Оператор $\Delta\colon P_1 \to P_2$, $P_i = \Gamma(\pi_\infty^*(\xi_i))$, называется *$\mathscr{C}$-дифференциальным*, если он имеет вид $\Delta = \sum_i f_i \hat{\Delta}_i$, где $f_i \in C^\infty(J^\infty(\pi))$, а $\Delta_i\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$ — линейные дифференциальные операторы. Модуль $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов обозначается $\mathscr{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2)$.

З а д а ч а 7. Обозначим через $\mathrm{D}(\pi)$ модуль векторных полей на $J^\infty(p)$, через $\mathrm{D}^v(\pi)$ — модуль вертикальных относительно проекции $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$ полей, а через $\mathscr{C}\mathrm{D}(\pi)$ — модуль полей, лежащих в распределении Картана. Докажите, что $\mathscr{C}\mathrm{D}(\pi) = \mathrm{D}(\pi) \cap \mathscr{C}\mathrm{Diff}(C^\infty(J^\infty(\pi)), C^\infty(J^\infty(\pi)))$.

З а д а ч а 8. Поле $X \in \mathrm{D}^v(\pi)$ называется *эволюционным*, если $[X, \mathscr{C}\mathrm{D}(\pi)] \subset \mathscr{C}\mathrm{D}(\pi)$. Покажите, что эволюционные поля коммутируют с полными производными. Докажите, что эволюционное поле X однозначно определяется таким элементом $\varphi \in \varkappa = \Gamma(\pi_\infty^*(\pi))$, что $X(f) = \langle \varphi, f \rangle$, если f — функция на тотальном пространстве E расслоения π линейная вдоль слоев. Обозначим эволюционное поле, отвечающее φ через $Э_\varphi$. Проверьте равенство

$$Э_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j},$$

где $D_\sigma = D_{i_1} \circ \ldots \circ D_{i_{|\sigma|}}$, $\sigma = i_1 \ldots i_{|\sigma|}$.

З а д а ч а 9. Мы отождествляем горизонтальный модуль $\varkappa$ и множество эволюционных полей. Покажите, что $\varkappa$ является алгеброй Ли относительно скобки $\{\cdot,\cdot\}$, определяемой условием $Э_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = [Э_{\varphi_1}, Э_{\varphi_2}]$. Докажите формулу $\{\varphi_1, \varphi_2\} = Э_{\varphi_1}(\varphi_2) - Э_{\varphi_2}(\varphi_1)$.

З а д а ч а 10. Рассмотрим некоторое поле, сохраняющее распределение Картана, оно имеет вид $Э_\varphi + Y$, $Y \in \mathscr{C}\mathrm{D}(\pi)$. Предположим, что это поле определяет поток A_t (на бесконечномерном пространстве не каждое поле задает поток). Определим, для достаточно малых t, семейство сечений $s_t \in \Gamma(\pi)$ условием $j_\infty(s_t)(M) = A_t(j_\infty(s_0)(M))$. Докажите, что $\partial s_t/\partial t = j_\infty(s_t)^*(\varphi)$. Приведите примеры полей, сохраняющих распределение Картана, которые (а) задают и (б) не задают поток.

З а д а ч а 11. Пусть P — горизонтальный модуль и $f \in P$. Рассмотрим *линеаризацию* f, т.е. оператор $\ell_f\colon \varkappa \to P$, определяемый равенством $\ell_f(\varphi) = Э_\varphi(f)$. Убедитесь, что линеаризация является $\mathscr{C}$-дифференциальным оператором. Докажите формулу $\nabla_{\ell_f(\varphi)} = \partial/\partial t(\nabla_f \circ (\mathrm{id} + t\nabla_\varphi))|_{t=0}$. Напишите координатное выражение для линеаризации.

З а д а ч а 12. Постройте изоморфизм $\mathscr{C}\Lambda^1 = \mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, C^\infty(J^\infty(\pi)))$, при котором форме $\omega \in \mathscr{C}\Lambda^1$ отвечает такой оператор $\nabla_\omega\colon \varkappa \to C^\infty(J^\infty(\pi))$, что $\nabla_\omega(\varphi) = \omega(Э_\varphi)$. Опишите этот изоморфизм в координатах. Продолжите его на внешнюю алгебру $\mathscr{C}\Lambda^* = \bigoplus_k \mathscr{C}\Lambda^p$, где $\mathscr{C}\Lambda^p = \mathscr{C}\Lambda^1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{C}\Lambda^1$ (p раз).

З а д а ч а 13. Докажите, что $\Lambda^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^q$, где $\bar{\Lambda}^q = \Gamma(\pi_\infty^*(\tau^q))$, τ^q — q-я внешняя степень кокасательного расслоения к M.

О п р е д е л е н и е 4. Комплекс $\ldots \xrightarrow{\hat{d}} \bar{\Lambda}^q \xrightarrow{\hat{d}} \bar{\Lambda}^{q+1} \xrightarrow{\hat{d}} \ldots$ называется *горизонтальным комплексом де Рама*. Его когомологии называются горизонтальными когомологиями и обозначаются $\bar{H}^q$.

З а д а ч а 14. Продолжите горизонтальный дифференциал де Рама до такого дифференцирования внешней алгебры Λ^*, что $\hat{d}(\mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^q) \subset \mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^{q+1}$, $d\hat{d} + \hat{d}d = 0$ и, в координатах, $\hat{d}\omega^j_\sigma = \sum_i \omega^j_{\sigma i} \otimes dx_i$. Пусть $d_{\mathscr{C}} = d - \hat{d}$. Покажите, что $(\mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^q, \hat{d}, d_{\mathscr{C}})$ — бикомплекс (*вариационный бикомплекс*).

З а д а ч а 15. Пусть P — горизонтальный модуль. Докажите, что комплекс

$$\dots \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^q) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^{q+1}) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^n) \to 0,$$

где $\delta(\Delta) = \hat{d} \circ \Delta$, точен всюду, кроме последнего члена, в котором группа когомологий изоморфна $\hat{P} = \mathrm{Hom}_{C^\infty(J^\infty(\pi))}(P, \bar{\Lambda}^n)$.

О п р е д е л е н и е 5. Каждый $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\Delta\colon P \to Q$ индуцирует коцепное отображение комплексов из предыдущей задачи; соответствующее отображение когомологий $\Delta^*\colon \hat{Q} \to \hat{P}$ называется *сопряженным* к Δ оператором.

З а д а ч а 16. Докажите, что

1) оператор Δ^* — $\mathscr{C}$-дифференциальный и имеет тот же порядок, что и Δ;
2) $(\Delta_1 \circ \Delta_2)^* = \Delta_2^* \circ \Delta_1^*$;
3) $\Delta^{**} = \Delta$;
4) для любых $p \in P$, $\hat{q} \in \hat{Q}$, $\Delta \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, Q)$ существует такая форма $G \in \hat{\Lambda}^{n-1}$, что $\langle \Delta(p), \hat{q} \rangle - \langle \Delta^*(\hat{q}), p \rangle = \hat{d}G$ (формула Грина);
5) сопряженный оператор можно определять как такой единственный оператор, что $\langle \Delta(p), \hat{q} \rangle$ и $\langle \Delta^*(\hat{q}), p \rangle$ отличаются на $\hat{d}$-точную форму;
6) естественная проекция $\mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^n) \to \hat{P}$ из предыдущей задачи имеет вид $\Delta \mapsto \Delta^*(1)$.

Опишите операцию сопряжения в координатах.

З а д а ч а 17. Докажите, что комплексы

$$\dots \mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^q \xrightarrow{\hat{d}} \mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^{q+1} \xrightarrow{\hat{d}} \dots \xrightarrow{\hat{d}} \mathscr{C}\Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^n \to 0 \qquad (p \geqslant 1)$$

из вариационного бикомплекса точны всюду, кроме последнего члена, в котором группа когомологий изоморфна модулю $\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(p-1)}(\varkappa, \hat{\varkappa})$, состоящему из кососимметричных и кососопряженных по каждому аргументу $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов $\varkappa \times \dots \times \varkappa \to \hat{\varkappa}$ ($p-1$ раз).

З а д а ч а 18. В силу предыдущей задачи, строка $q = n$ вариационного бикомплекса порождает комплекс

$$0 \to \bar{H}^n \xrightarrow{\mathcal{E}} \hat{\varkappa} \xrightarrow{\mathcal{E}_1} \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(1)}(\varkappa, \hat{\varkappa}) \xrightarrow{\mathcal{E}_2} \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(2)}(\varkappa, \hat{\varkappa}) \xrightarrow{\mathcal{E}_3} \dots,$$

называемый *вариационным комплексом*. Докажите, что $\mathcal{E}(\omega) = \ell^*_\omega(1)$, где $\omega \in \bar{\Lambda}^n$ (строго говоря, оператор $\mathcal{E}$ действует на горизонтальные классы когомологий, так что выражение $\mathcal{E}(\omega)$ означает, что $\mathcal{E}$ применяется к классу когомологий формы ω), а при $p \geqslant 1$

имеет место формула

$$\mathcal{E}_p(\nabla)(\varphi_1,\dots,\varphi_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\mathcal{Э}_{\varphi_i}(\nabla(\varphi_1,\dots,\hat{\varphi}_i,\dots,\varphi_p))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\nabla(\{\varphi_i,\varphi_j\},\varphi_1,\dots,\hat{\varphi}_i,\dots,\hat{\varphi}_j,\dots,\varphi_p)+$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}((p-1)\ell^*_{\varphi_i}(\nabla(\varphi_1,\dots,\hat{\varphi}_i,\dots,\varphi_p))-\ell^*_{\nabla(\varphi_1,\dots,\hat{\varphi}_i,\dots,\varphi_p)}(\varphi_i)).$$

З а д а ч а 19. Убедитесь, что оператор $\mathcal{E}$ (*оператор Эйлера*) сопоставляет, говоря физическим языком, лагранжиану (действию) левую часть соответствующего уравнения Эйлера-Лагранжа.

З а д а ч а 20. Докажите, что вариационный комплекс точен всюду кроме первого члена, когомологии в котором совпадают с когомологиями де Рама базы $H^n(M)$.

З а д а ч а 21. Докажите, что элемент $\psi\in\hat{\varkappa}$ лежит в образе оператора Эйлера тогда и только тогда, когда $\ell^*_\psi=\ell_\psi$. Проверьте, что в этом случае имеет место формула $\psi=\mathcal{E}\big(\int_0^1 A_t(\psi(\varphi_t))\,dt\big)$, где A_t — семейство послойных диффеоморфизмов пространства $J^\infty(\pi)$, сохраняющих распределение Картана, и в силу этого являющееся потоком некоторого зависящего от t эволюционного поля $\mathcal{Э}_{\varphi_t}$ (т. е. $\mathcal{Э}_{\varphi_t}=A_t^{*-1}\circ dA_t^*/dt$). Также предполагается, что $A_0=0$ и $A_1=\mathrm{id}$.

Рассмотрите, в частности, случай $A_t(u^j_\sigma)=tu^j_\sigma$.

З а д а ч а 22. Найдите ψ из условия $\mathcal{E}(\psi)=u_x^{-1}-uu_x^{-3}u_{xx}$.

З а д а ч а 23. Докажите формулу $\mathcal{E}(\Delta(f))=\ell^*_f(\Delta^*(1))+\ell_{\Delta^*(1)}(f)$, где $\Delta\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}(P,\bar{\Lambda}^n)$, $f\in P$.

З а д а ч а 24. Докажите формулу $\mathcal{E}(\mathcal{Э}_\varphi(\omega))=\mathcal{Э}_\varphi(\mathcal{E}(\omega))+\ell^*_\varphi(\mathcal{E}(\omega))$, где $\varphi\in\varkappa$, $\omega\in\bar{\Lambda}^n$.

З а д а ч а 25. Докажите, что $\bar{H}^q=H^q(M)$ при $q\leqslant n-1$. Здесь $H^q(M)$ — q-я группа когомологий де Рама базы M. Что можно сказать о группе $\bar{H}^n$?