Симлициальные разбиения

Все гомологии следует вычислять с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$. Для всех нижеприведенных примеров проверьте равенство: $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim H_k(M, \mathbb{R})$, где χ — эйлерова характеристика, n — размерность симплициального комплекса, а c_k — число симплексов размерности k в нем.

Задача 1. Вычислите гомологии букета n окружностей.

Задача 2. Реализуем сферу S^n как подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$, заданное условием $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$. Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$ — последовательность, где $\alpha_i \in \{0, 1, -1\}$. Обозначим $U_\alpha = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^n \mid \operatorname{sign} x_i = \alpha_i\}$. Докажите, что множества U_α для всех возможных α образуют симплициальное разбиение S^n. Вычислите размерность симплекса U_α и границу ∂U_α. Вычислите гомологии полученного симплициального комплекса.

Указание: Начните со случаев $n = 0$ и $n = 1$.

Задача 3. Представим двумерную сферу с g ручками в виде $4g$-угольника, противоположные стороны которого отождествлены с сохранением ориентации. Рассмотрим симплициальное разбиение, получающееся при соединении всех вершин $4g$-угольника с его центром. Найдите гомологии полученного симплициального комплекса.

Задача 4. Используя симплициальное разбиение, аналогичное симплициальному разбиению из предыдущей задачи, найдите гомологии двумерного цилиндра, проективной плоскости и бутылки Клейна.

Задача 5. Над симплициальным разбиением производят следующую операцию: внутри симплекса S ставится точка и соединяется со всеми его вершинами. Докажите, что получилось новое симплициальное разбиение (опишите его симплексы всех размерностей), и что гомологии симплициального комплекса при этой операции не изменились.

Задача 6. Постройте симплициальное разбиение $\mathbb{R}P^n$ и найдите гомологии соответствующего симплициального комплекса.

Указание: Рассмотрите двулистное накрытие $S^n \to \mathbb{R}P^n$ и симплициальное разбиение задачи 2.

Задача 7. Пусть S — n-мерный симплекс. Постройте симплициальное разбиение произведения $S \times [0, 1]$. Докажите, что для каждого симплициального комплекса A гомологии A и $A \times [0, 1]$ совпадают.

Указание: При построении симплициального разбиения $S \times [0, 1]$ разберите сначала случаи $n = 1$ и $n = 2$, а затем проведите индукцию по размерности (грань симплекса это симплекс меньшей размерности).

Задача 8. Постройте симплициальное разбиение $S^1 \times S^2$ и найдите гомологии соответствующего симплициального комплекса.

Указание: Для построения симплициального разбиения $S^1 \times S^2$ воспользуйтесь конструкцией, аналогичной конструкции предыдущей задачи для $n = 2$.

Задача 9. Постройте симплициальное разбиение $S^2 \times S^2$ и найдите гомологии соответствующего симплициального комплекса.

Задача 10. Докажите для произвольного комплекса $M = \ldots \xrightarrow{\partial_{i+1}} M_i \xrightarrow{\partial_i} M_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \ldots$ линейных пространств над полем $\mathbb{R}$ равенство $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim M_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim H_k(M)$.

Задача 11. Вычислите

а) 0-мерные гомологии связного топологического пространства;

б) старшие гомологии связного ориентируемого многообразия.