Математический Колледж НМУ **Топология, 3 семестр**

22.10.2001

Последовательность Майера-Виеториса. Клеточные гомологии.

Задача 1. Вычислите гомологии[1] $\mathbb{R}P^2$

а) С помощью последовательности Майера—Виеториса

б) С помощью клеточного разбиения

Задача 2. Вычислите гомологии окружности S^1 и тора T^2 с помощью последовательности Майера—Виеториса. Постройте клеточное разбиение T^2 и вычислите его гомологии. Чему равны гомологии двумерного тора с выброшенной точкой?

Задача 3. Постройте клеточное разбиение $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ и вычислите его гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 4. Пусть X — пространство, полученное из замкнутого треугольника с вершинами v_0, v_1, v_2 линейным отождествлением ребер v_0v_1, v_1v_2 и v_2v_0 с ребрами v_1v_2, v_2v_0 и v_0v_1 соотвественно. Вычислите гомологии X.

Задача 5. Постройте клеточное разбиение и вычислите гомологии бутылки Клейна.

Рассмотрим трехмерную сферу S^3. Пусть (z_1, z_2) – точка комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. Тогда уравнение $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, где $|z|$ – модуль комплексного числа, задает S^3. Определим действие группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ на S^3, где p – простое число, по правилу: $\mu_p(z_1, z_2) = (z_1\mu_p, z_2\mu_p)$, где μ_p – образующая группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Фактор S^3 по действию $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ называется *линзовым пространством* и обозначается через $L(1,p)$ (эту конструкцию можно провести для сфер любой нечетной размерности $(2n + 1)$ – отсюда индекс 1 в обозначении).

Задача 6. Постройте клеточное разбиение $L(1,p)$ и вычислите его гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Задача 7. Постройте клеточное разбиение пространства единичных касательных векторов к двумерной сфере S^2 и вычислите его гомологии.

Из теоремы классификации гладких двумерных связных замкнутых компактных многообразий следует, что любое такое многообразие диффеоморфно либо сфере S^2 с g ручками, либо сфере S^2 с μ пленками Мебиуса. Последняя серия многообразий получается, если из сферы S^2 выбросить μ попарно непересекающихся дисков D^2 и на границе каждого из получившихся отверстий отождествить диаметрально противоположные точки.

Задача 8. Вычислить гомологии этих многообразий.

Задача 9. * Построить клеточное разбиение пространства единичных касательных векторов к двумерной сфере с g ручками и вычислить его гомологии.

[1] Всюду, где это не указано специально, подразумеваются гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$