5.11.2001

Теория Морса

Задача 1. Какое наименьшее число критических точек может иметь функция Морса на $\mathbb{T}^n$? на $\mathbb{R}P^n$? на произвольном компактном связной двумерном многообразии без края ? Что можно сказать про индексы этих критических точек ?

Задача 2. Докажите, что на всяком компактном двумерном многообразии без края существует гладкая функция с не более чем тремя критическими точками.

Задача 3. Постройте пример гладкой функции на $\mathbb{T}^n$ с ровно $n+1$ критической точкой.

Задача 4. *Слабая теорема Лефшеца.* Пусть V – гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$ (т.е. множество нулей однородного многочлена какой–то степени). Докажите, что естественное отображение $H_q(V, \mathbb{Q}) \to H_q(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Q})$, индуцированное вложением, является изоморфизмом при $q < n-1$ и сюръективно в размерности $n-1$.