Математический колледж НМУ

Экзамен по топологии

2 курс, II семестр, 12 декабря 2001 г.

1) На бутылке Клейна задана функция $\cos(2\phi) + \cos(\psi)$, где ϕ и ψ – координаты на бутылке Клейна (как их ввести?).

   а) Является ли эта функция морсовской?

   б) Если да, то постройте с ее помощью клеточное разбиение и вычислите соответствующие гомологии.

2) Вычислить гомологии $\mathbb{C}^2 \setminus \mathrm{X}$, где $\mathrm{X} = \{(z_1, z_2) | z_1^2 + z_2^2 = 0\}$.

3) Пусть X – CW-комплекс с клетками e_0, e_2, e_4, размерность клетки e_i равна i. Известно, что гомотопический тип X определяется классом $[\alpha] \in \pi_3(\mathrm{X}_2)$, где α – ограничение характеристического отображения четырехмерной клетки на ее границу.

   а) Доказать, что $\mathrm{H}_2(\mathrm{X}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

   б) Пусть $\eta \in \mathrm{H}_2(\mathrm{X}, \mathbb{Z})$ – образующая. Показать, что если $[\alpha] = 0$, то $\eta \cup \eta = 0$.

4) Рассмотрим $[0, 1] \times \mathrm{T}^2$ (цилиндр над двумерным тором). Склеим края по диффеоморфизму, который задается формулой $f(z, \omega) = (z\omega^n, \omega)$, $n \in \mathbb{Z}$ (мы полагаем, что $\mathrm{T}^2 = \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |\omega| = 1\}$). Получается компактное многообразие X_n без края. Вычислить $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}_n, \mathbb{Z})$.

5) Пусть X – гладкое многообразие, которое покрыто конечным числом открытых множествам $\{\mathrm{B}_n\}_{n=1}^N$, где каждое B_n стягиваемо. Предположим, что $\pi_0(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{B}_m) \leq k$ при всех n и m. Найдите верхнюю оценку для первого числа Бетти X (ранга группы $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbb{Z})/\mathrm{Tors}$).