Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 1. Способы задания римановых поверхностей.

1 Комплексные проективные пространства

Все прямые в $n+1$-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$, проходящие через начало координат, образуют *n-мерное комплексное проективное пространство* $\mathbf{CP}^n$. Такая прямая однозначно определяется отличной от начала координат точкой $(z_0, z_1, \dots, z_n)$, через которую она проходит. В свою очередь, эта точка определена однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число λ: точка $(\lambda z_0, \lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$ задает ту же самую прямую. Точку проективного пространства будем записывать в виде $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$, понимая под этим обозначением класс эквивалентности наборов координат относительно описанного выше отношения эквивалентности.

Полагая $z_i = 1$ поочередно для $i = 0, 1, \dots, n$, мы получаем $n+1$ *карту* в проективном пространстве. Такая карта покрывает все пространство за исключением гиперплоскости $z_i = 0$ и является n-мерным комплексным пространством $\mathbf{C}^n$. Все координаты кроме i-ой в совокупности образуют набор координат в соответствующей карте.

При $n = 1$ мы имеем дело с одномерным проективным пространством $\mathbf{CP}^1$. Это один из первых примеров комплексных кривых. Ее называют также *рациональной кривой*. Вот другие простейшие примеры:

- комплексная прямая $\mathbf{C}$;
- любое открытое подмножество комплексной прямой, например,
  - единичный диск $|z| < 1$;
  - единичный диск с выколотым центром, $0 < |z| < 1$;
  - кольцо $0 < r < |z| < R$;
  - верхняя полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Положив $z_0 = 1$ или $z_1 = 1$ в $\mathbf{CP}^1$, мы получаем две карты в $\mathbf{CP}^1$, каждая из которых представляет собой комплексную прямую $\mathbf{C}$. На первой из этих карт имеется координата z_1, на второй — координата z_0. Точку, не попавшую в карту, мы будем называть бесконечностью; такая точка обозначается $z_1 = \infty$ в первой карте и соответственно $z_0 = \infty$ во второй.

2 Кривые в проективных пространствах

Пока речь будет идти только о гладких кривых.

Определим сначала кривую на проективной плоскости. Это подмножество $C \subset \mathbf{CP}^2$ проективной плоскости, задаваемое уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — невырожденный однородный многочлен от трех переменных. Условие невырожденности означает следующее. Пусть $A \in C$ — точка кривой. Рассмотрим произвольную карту, в которой лежит точка A; пусть это карта $z = 1$. Тогда для многочлена $f(x,y) = F(x,y,1)$ дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

не обращается в нуль в точке A.

Упражнение 2.1 *Проверьте, что условие невырожденности не зависит от выбора карты.*

Замечание 2.2 *Условие невырожденности удобно проверять, действуя в обратном направлении. Сначала следует найти точки вырождения многочлена $F(x,y,z)$ на проективной плоскости $\mathbf{CP}^2$. Как правило, их число конечно. Затем следует проверить, лежит ли какая-нибудь из них на нашей кривой C.*

Пример 2.3 *Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением*

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена F означает, что $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$, т.е. $x = y = z = 0$. Поскольку ни одна из точек проективной плоскости не имеет таких однородных координат, многочлен F невырожден на всей плоскости, а значит и на своем нулевом уровне.

Пример 2.4 *Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением*

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена F означает, что $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$, т.е. $x = y = 0$. Это условие выделяет точку $(0:0:1)$ на проективной плоскости. Точка вырождения лежит на кривой $x^2 + y^2 = 0$, поэтому рассматриваемая кривая особа. На самом деле она представляет из себя пару проективных прямых, задаваемых уравнениями $x + iy = 0$ и $x - iy = 0$. Эти прямые пересекаются в единственной точке — особой точке кривой.

Выбор координат на проективной плоскости (и, более общо, в проективном пространстве) неоднозначен. От одной системы координат к другой можно перейти *проективным преобразованием* — линейным преобразованием $Z = AZ'$, рассматриваемым с точностью до умножения на константу (здесь Z, Z' - вектора-столбцы, A — матрица).

Упражнение 2.5 *Пусть C — невырожденная коника на плоскости, т.е. невырожденная кривая, заданная уравнением второй степени. (Вообще гиперповерхность в проективном пространстве, заданная однородным уравнением второй степени, называется* квадрикой.*) Докажите, что в подходящей системе координат она имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.*

Задавать кривые в трехмерном проективном пространстве и пространствах более высокой размерности сложнее.

Пример 2.6 *Построим отображение проективной прямой* $\mathbf{CP}^1$ *в проективное пространство. Для этого*

- *введем однородные координаты* $(t_0 : t_1)$ *в* $\mathbf{CP}^1$*;*
- *введем однородные координаты* $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ *в* $\mathbf{CP}^3$*;*
- *рассмотрим отображение из* $\mathbf{CP}^1$ *в* $\mathbf{CP}^3$*, заданное формулой*

$$t \mapsto (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3).$$

Образ проективной прямой при построенном отображении лежит на каждой из следующих квадрик:

$$\begin{aligned} z_0 z_3 - z_1 z_2 &= 0; \\ z_1^2 - z_0 z_2 &= 0; \\ z_2^2 - z_1 z_3 &= 0. \end{aligned}$$

и его можно определить как пересечение этих квадрик.

Упражнение 2.7 *Проверьте, что пересечение любых двух из указанных в примере квадрик не совпадает с образом построенного отображения (т.е. содержит лишние точки).*

Приведенный пример показывает, что трудно ожидать, чтобы кривая в проективном пространстве представлялась в виде пересечения *двух* гиперповерхностей (в общем случае n-мерного проективного пространства — в виде пересечения $n-1$ гиперповерхностей). Поэтому соответствующее определение естественно давать лишь *локально*.

Итак, *гладкой кривой* в n-мерном проективном пространстве называется такое множество точек C, что для любой точки $A \in C$ из этого множества существует такая окрестность этой точки и такой набор однородных многочленов $F_1, \ldots, F_{n-1}$, что в выбранной окрестности C совпадает с пересечением гиперповерхностей $F_1 = 0$, $\ldots$, $F_n = 0$, а дифференциалы $dF_1, \ldots, dF_{n-1}$ линейно независимы в точке A.

С топологической точки зрения гладкая кривая представляет собой двумерную поверхность.

Упражнение 2.8 *Проверьте, что образ проективной прямой в приведенном выше примере является гладкой кривой.*

3 Комплексная структура на кривой

Поскольку гладкая кривая в n-мерном проективном пространстве локально задается системой из $n-1$ полиномиальных уравнений, мы можем, по теореме о неявной функции, отождествить окрестность каждой точки такой кривой с единичным диском в $\mathbf{C}^1$. Тем самым, у каждой точки A такой кривой C имеется взаимно-однозначное отображение m_U из некоторой окрестности $U = U(A) \subset C$ этой точки на единичный диск.

Такое отображение называется *локальной координатой* в выбранной окрестности[1]. При этом если две такие окрестности U, V пересекаются, то отображение $m_U m_V^{-1}$, определенное в некоторой области единичного диска, оказывается *голоморфным*. Такой набор окрестностей и локальных координат называется *комплексной структурой* на кривой.

Понятие комплексной структуры позволяет ввести и понятие голоморфного отображения комплексных кривых. Отображение $f : C \to C'$ комплексных кривых, наделенных комплексными структурами $\{(U, m_U)\}$ и $\{(U', m_{U'})\}$ соответственно, называется *голоморфным*, если для любой точки $A \in C$ существует окрестность $U' \subset C'$ точки $f(A')$ вместе с отображением $m'_{U'} : U' \to \mathbf{C}$ и окрестность U точки A вместе с отображением $m_U : U \to \mathbf{C}$, такие, что отображение $m'_{U'} f m_U^{-1}$ голоморфно там, где оно определено (область его определения заведомо непуста). Ясно, что если указанное сквозное отображение голоморфно для некоторой пары окрестностей и локальных координат, то оно голоморфно и для любой такой пары.

Пример 3.1 *Множество прямых, проходящих через заданную точку проективной плоскости, образует проективную прямую. Поэтому, зафиксировав в* $\mathbf{CP}^2$ *точку* A, *мы можем построить отображение из произвольной плоской кривой* C *в проективную прямую: нужно каждой точке кривой* C *сопоставить прямую, проходящую через точку* A *и выбранную точку кривой. Докажите, что это отображение голоморфно.*

Взаимнооднозначное голоморфное отображение пары кривых, такое что обратное к нему тоже голоморфно, называется *биголоморфным* отображением, или *изоморфизмом* кривых.

4 Разветвленные накрытия

Поскольку с топологической точки зрения комплексные кривые представляют собой вещественные двумерные поверхности, мы будем применять к ним топологические понятия (накрытие, компактность и проч.).

Пусть у нас есть какая-нибудь комплексная кривая C, Y — двумерная поверхность и $f : Y \to C$ — накрытие. Тогда мы можем «поднять» комплексную структуру с кривой C на Y. Делается это так. Возьмем точку $y \in Y$ и ее образ $t = f(y)$ при накрытии f. У точки $t \in C$ есть окрестность $U = U(t)$, такая, что ограничение накрывающего отображения на связную компоненту прообраза $f^{-1}(U)$, содержащую y, взаимнооднозначно. Комплексная координата на такой окрестности вводится как композиция $m_U \circ f$ (если окрестность U не входит в число окрестностей, задающих комплексную структуру, то нужно взять бóльшую определяющую окрестность и ограничить координатное отображение с нее на U).

Упражнение 4.1 *Проверьте, что так определенные локальные координаты действительно задают комплексную структуру на* Y. *Это означает, что на пересечении определяющих окрестностей замены локальных координат голоморфны.*

В простейшей — и чрезвычайно важной — ситуации речь идет о конечнократных накрытиях проколотой сферы. Пусть кривая C — это проективная прямая $\mathbf{CP}^1$, из

[1]Иногда в определении локальной координаты требуют, чтобы точка A отображалась в центр диска.

которой выколото конечное множество точек $T = \{t_1, \ldots, t_c\}$. Для конечнократного накрытия $f : Y \to \mathbf{CP}^1 \setminus T$ кратности d следующим образом определено понятие монодромии. Возьмем какую-нибудь точку $t_0 \in \mathbf{CP}^1 \setminus T$. Любой гладкий путь γ в $\mathbf{CP}^1 \setminus T$ с началом и концом в точке t_0, не проходящий более через t_0, определяет перестановку конечного множества из d элементов — прообраза $f^{-1}(t_0) \subset Y$: нужно рассмотреть поднятие $f^{-1}(\gamma) \subset Y$ этого пути и выкинуть из него слой над точкой t_0; тогда прообраз пути разбивается на d компонент связности, конец каждой из которых задает, куда переходит его начало. Полученная перестановка и называется *монодромией слоя вдоль пути* γ.

Упражнение 4.2 *Проверьте, что монодромия вдоль пути зависит только от гомотопического класса этого пути и что монодромия является гомоморфизмом* $\pi_1(\mathbf{CP}^1 \setminus T, t_0) \to S_d$ *из фундаментальной группы проколотой сферы с базисной точкой* t_0 *в группу* S_d *перестановок слоя.*

Соединим теперь точку t_0 с точкой t_i несамопересекающимся отрезком гладкой кривой, не проходящим через точки t_j для $j \neq i$. Такому отрезку можно сопоставить путь γ_i, который идет от t_0 к t_i вдоль выбранного отрезка, затем обходит вокруг точки t_i против часовой стрелки, затем возвращается вдоль выбранного отрезка в точку t_0. Проделаем теперь это с каждым из проколов t_i, следя за тем, чтобы

- отрезки, идущие в проколотые точки, пересекались попарно лишь в базисной точке t_0;
- циклический порядок, в котором отрезки выходят из точки t_0, совпадал бы с порядком нумерации проколотых точек.

В результате получим граф-звезду на $\mathbf{CP}^1$ с центром в точке t_0 и лучами, идущими из t_0 в t_i.

Тем самым мы построили набор перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_c$ на прообразе $f^{-1}(y_0) \in Y$, обладающий следующими свойствами:

- подгруппа в S_d, порожденная перестановками $\sigma_1, \ldots, \sigma_c$, действует на слое *транзитивно*, т.е. для любой пары точек в прообразе есть перестановка из подгруппы, переводящая первую точку во вторую;
- последовательно произведение $\sigma_c \circ \ldots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ всех этих перестановок является тождественной перестановкой.

Упражнение 4.3 *Докажите эти свойства.*

Упражнение 4.4 *Докажите, что для любого набора точек* $T = \{t_1, \ldots, t_c\}$ *на сфере, любой звезды на этих точках и любого набора перестановок* $\sigma_1, \ldots, \sigma_c$*, обладающих двумя приведенными выше свойствами, существует накрытие* $Y \to S^2 \setminus T$*, монодромия которого вдоль пути* γ_i *совпадает с* σ_i*. Это накрытие единственно, т.е. для двух таких накрытий* $f_1 : Y_1 \to S^2$*,* $f_2 : Y_1 \to S^2$ *существует гомеоморфизм* $h : Y_1 \to Y_2$*, такой, что* $f_2 = h \circ f_1$*.*

Таким образом, мы получили еще один, чрезвычайно мощный, инструмент построения комплексных кривых. Для того, чтобы построить такую кривую, нужно взять на комплексной проективной прямой набор точек, построить звезду с лучами, идущими в эти точки (звезда задается с точностью до гомотопической эквивалентности) и задаться набором перестановок множества из d элементов, обладающим двумя выписанными свойствами.

Важным свойством накрытий проколотой сферы является то, что их можно достроить до разветвленных накрытий компактных поверхностей. А именно, для конечнократного накрытия $f : Y \to S^2 \setminus T$ существует единственное непрерывное отображение $\bar{f} : \overline{Y} \to S^2$ компактной поверхности $\overline{Y}$, содержащей Y и такой, что $\overline{Y} \setminus Y$ состоит из конечного множества точек, ограничение которого на Y совпадает с f.

Поверхность $\overline{Y}$ и отображение $\bar{f}$ строятся следующим образом. Для каждой точки проколотой сферы прообраз ее достаточно маленькой круговой окрестности при отображении f состоит из d компонент связности, каждая из которых гомеоморфна диску. Если же мы возьмем малую окрестность выколотой точки (которая представляет собой проколотый диск), то ее прообраз состоит, вообще говоря, из менее, чем d компонент связности, каждая из которых также является проколотым диском. Число этих компонент связности в прообразе окрестности точки t_i совпадает с числом циклов в перестановке σ_i. А степень ограничения отображения f на такую компоненту связности есть не что иное, как длина цикла. Теперь поверхность $\overline{Y}$ строится очень просто: нужно в поверхности Y вклеить по точке в каждый из проколотых дисков в прообразах малых окрестностей точек, выколотых из сферы. Общее количество вклеенных точек будет равно суммарному числу циклов в перестановках σ_i.

Упражнение 4.5 *Проверьте, что цикловой тип (т.е. количество циклов и набор их длин) перестановки σ_i не зависит от выбора базисной точки t_0 и пути, соединяющего ее с t_i.*

Точки в образе разветвленного накрытия, число прообразов которых меньше степени накрытия, называются *точками ветвления*, или *критическими значениями*, накрытия. Важным свойством разветвленных накрытий является возможность продолжить комплексную структуру в окрестности прообразов точек ветвления. А именно, пусть $y \in \overline{Y}$ — прообраз точки ветвления $\bar{f}(y) = t$. Тогда у точки y есть проколотая круговая окрестность, которая накрывает проколотую окрестность точки t с некоторой кратностью k (эта кратность называется *порядком ветвления* в данной точке прообраза). Выбрав координату z в окрестности точки $t \in \mathbf{CP}^1$, мы можем ввести на накрывающей проколотой окрестности точки y координату $z^{1/k}$, которая, как нетрудно видеть, продолжается в точку, заклеивающую прокол. Как мы увидим, всякую гладкую компактную комплексную кривую можно получить как разветвленное накрытие сферы.

Упражнение 4.6 *Пусть накрываемая поверхность представляет собой не сферу, а проколотую поверхность более высокого рода. Как нужно изменить понятия звезды и набора перестановок, чтобы накрывающая поверхность по-прежнему восстанавливалась однозначно?*

5 Факторкривая

Еще один способ построения комплексных кривых состоит наоборот в опускании комплексной структуры с кривой на накрываемую кривую. Допустим на комплексной кривой Y дискретно действует группа преобразований G, сохраняющих комплексную структуру. Тогда факторпространство — т.е. множество орбит — по действию этой группы наделено естественной структурой комплексной кривой.

Пример 5.1 *Пусть $Y = \mathbf{C}$ — комплексная прямая. Рассмотрим на этой прямой целочисленную решетку, порожденную над $\mathbf{Z}$ двумя векторами 1 и τ, где $\tau \in \mathbf{C}$ — комплексное число с положительной мнимой частью. Сдвиги на эти два вектора порождают группу преобразований комплексной прямой, сохраняющих комплексную структуру на $\mathbf{C}$. Это свободная коммутативная группа с двумя образующими. Ее орбиты являются всевозможными сдвигами целочисленной решетки. Фактор по действию этой группы — тор, который можно отождествить с параллелограммом, натянутым на векторы 1 и τ, с отождествленными противоположными сторонами. Такой тор называется* эллиптической кривой.

Упражнение 5.2 *Докажите, что* кривая Ферма $x^n + y^n = z^n$ *на проективной плоскости гладкая.*

Упражнение 5.3 *Определим отображение кривой Ферма в $\mathbf{CP}^1$, положив в карте $z = 1$ значение этого отображения равным координате x точки кривой. а) Докажите, что построенное отображение достраивается до голоморфного отображения из кривой Ферма в $\mathbf{CP}^1$. б) Найдите точки ветвления этого отображения и порядки ветвления в их прообразах.*

Упражнение 5.4 *Пусть C — гладкая плоская коника $x^2 + y^2 = z^2$. Постройте биголоморфное отождествление кривой C и проективной прямой.*

Упражнение 5.5 *Пусть Y — плоская кривая, заданная в карте $z = 1$ уравнением $y^2 = x - x^3$. а) Нарисуйте вещественную часть этой кривой. б) Найдите точки ветвления проекции этой кривой на ось x и на ось y и порядки ветвления в их прообразах.*

Упражнение 5.6 *Приведите пример двух неизоморфных эллиптических кривых.*