Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 10. Теоремы Абеля и Якоби

Погуляв по пространствам модулей кривых, вернемся к изучению отдельных кривых. Как это ни прискорбно, теперь придется обратить внимание на *трансцендентные характеристики* кривой (раньше нам приходилось вспоминать о вещественной структуре лишь при доказательстве того, что размерность пространства голоморфных дифференциалов на кривой рода g не превосходит g).

1 Теорема Абеля и якобиан кривой

Пусть ω — мероморфная 1-форма на комплексной кривой C, p, q — две точки этой кривой. Соединим эти две точки путем γ в C, не проходящим через полюса 1-формы ω, и рассмотрим $\int_\gamma \omega$. Если при фиксированной точке p конечная точка q пути γ, а с ней и сам путь, непрерывно меняются, то значение этого интеграла становится функцией от q, которую мы обозначим через $I(q)$. Это голоморфная функция, хотя ее и нельзя, как правило, продолжить до голоморфной функции на всей кривой C.

Интеграл $I(q)$ не зависит от выбора пути γ в данном гомотопическом классе путей в дополнении к полюсам 1-формы ω. Вычисление подобных интегралов — классическая задача математического анализа. Однако она допускает разумное решение только в ситуации, когда кривая C рациональна.

Упражнение 1.1. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}.$$

Более общим образом, найдите неопределенный интеграл

$$\int R(x,y)dx,$$

где $y^2 = x^2+ax+b$, а R — произвольная рациональная функция.

Для кривых же старших родов написанные выше интегралы являются простейшими — их нельзя выразить ни через что более осмысленное. В рациональном случае при замене одного гомотопического класса кривой другим значение интеграла меняется на линейную комбинацию вычетов 1-формы в ее полюсах. Эти вычеты легко вычисляются, что и позволяет считать интегралы в виде рациональных функций. В случае же старших родов помимо вычетов в полюсах переход к другому гомотопическому классу пути требует подсчета *периодов* 1-формы — значений ее интегралов по замкнутым путям. А вычисление периодов — иррациональная задача, даже если рассматриваемая 1-форма голоморфна.

Однако же что-то разумное про интегралы сказать можно, если рассматривать их не по отдельности, а в виде некоего конгломерата.

Пример 1.2. Пусть C — эллиптическая кривая. Зафиксируем на C точку p и два замкнутых пути α, β с началом и концом в p, классы гомологий которых порождают первую группу гомологий кривой над целыми числами. Тогда базисными периодами голоморфной 1-формы ω являются величины

$$a = \int_\alpha \omega \text{ и } b = \int_\beta \omega.$$

Любой другой период является целочисленной линейной комбинацией этих, $na + mb$.

Комплексные числа a, b линейно независимы над полем вещественных чисел. Действительно, если бы для некоторых вещественных чисел r, s, не равных нулю одновременно, выполнялось соотношение

$$r\int_\alpha \omega + s\int_\beta \omega = 0,$$

то такое же соотношение выполнялось бы и для комплексно-сопряженной формы $\bar\omega$,

$$r\int_\alpha \bar\omega + s\int_\beta \bar\omega = 0.$$

Однако, как мы знаем, классы когомологий 1-форм ω и $\bar\omega$ образуют базис в пространстве первых когомологий тора с вещественными коэффициентами. Поэтому их значения на нетривиальном цикле $r\alpha + s\beta$ не могут одновременно обращаться в нуль, что и доказывает требуемое утверждение.

Упражнение 1.3. Докажите, что если классы гомологий кривых α, β с общим началом и концом порождают группу целочисленных гомологий тора, то можно выбрать таких представителей этих классов, которые не имеют пересечений и самопересечений.

Приведенный выше пример показывает, что все периоды $na + mb$ образуют целочисленную решетку на комплексной прямой.

Упражнение 1.4. Покажите, что фактор комплексной прямой по построенной решетке изоморфен эллиптической кривой C.

Упражнение 1.5. Пусть C — плоская эллиптическая кривая, p — точка этой кривой. Пусть q_1, q_2, q_3 — точки пересечения этой кривой с некоторой прямой L. Докажите, что величина

$$\int_p^{q_1} \omega + \int_p^{q_2} \omega + \int_p^{q_3} \omega$$

не зависит от выбора прямой L.

Докажем следующее обобщение этого утверждения. Рассмотрим главный дивизор $D = (f)$ на эллиптической кривой C; пусть $\Lambda \subset \mathbf{C}$ — решетка периодов этой кривой. Спарим нули и полюса функции f, то есть занумеруем нули p_i и полюса q_i функции, $D = \sum p_i - \sum q_i$. Тогда

$$\sum_i \int_{p_i}^{q_i} \omega \equiv 0 \bmod \Lambda.$$

Для доказательства рассмотрим однопараметрическое семейство главных дивизоров $D_\lambda = (f - \lambda)$, параметризованное комплексной прямой. Выписанная выше сумма интегралов является голоморфной функцией параметра λ этого семейства.

Упражнение 1.6. Проверьте, что указанная голоморфная функция голоморфно продолжается в точку $\lambda = \infty$, т.е. продолжается до голоморфного отображения проективной прямой в эллиптическую кривую $\mathbf{C}/\Lambda$.

Из упражнения вытекает, что сумма интегралов постоянна: непостоянных разветвленных накрытий тора сферой не существует. Для того, чтобы доказать, что значение этого постоянного отображения равно нулю, осталось заметить, что при изменении λ полюса q_i функции $f-\lambda$ не двигаются, а при $\lambda \to \infty$ ее нули p_i стремятся к полюсам, а, значит, сумма интегралов стремится к нулю по модулю решетки периодов.

Для случая кривой C произвольного рода $g \geq 1$ осуществленная выше конструкция выглядит следующим образом. Всякий замкнутый путь γ на C определяет линейный функционал

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

на пространстве голоморфных 1-форм на C. Совокупность таких линейных функционалов образует дискретную подгруппу $\Lambda \subset \Omega^\vee(C)$ в пространстве, двойственном к пространству голоморфных 1-форм на C. Последнее пространство является g-мерным комплексным пространством, а подгруппа Λ — $2g$-мерной решеткой в нем. Это означает, что она (свободно) порождена над $\mathbf{Z}$ набором из $2g$ вещественно независимых векторов.

Действительно, пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ — произвольный набор путей на C, классы гомологий которых порождают группу гомологий $H_1(C, \mathbf{Z})$. Если соответствующие им линейные функционалы линейно зависимы над вещественными числами, то существует нетривиальная линейная комбинация $\gamma = \sum r_i \gamma_i$ этих путей с вещественными коэффициентами, такая, что

$$\int_\gamma \omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы ω. Но тогда

$$\int_\gamma \bar{\omega}$$

также равен нулю для любой голоморфной 1-формы, а это означает, что класс гомологий γ должен быть нулевым.

Факторгруппа $\Omega^\vee(C)/\Lambda$ называется *якобианом* кривой C. Она является компактным комплексным многообразием — g-мерным комплексным тором. Всякий комплексный тор можно получить, факторизуя комплексное векторное пространство по некоторой полной подрешетке в нем. При $g = 1$ всякая такая подрешетка изоморфна подрешетке периодов некоторой комплексной (эллиптической) кривой, однако при $g > 1$ это уже не так.

Упражнение 1.7. Покажите, что не всякая решетка в $\mathbf{C}^2$ реализуется как подрешетка периодов кривой рода 2. (Каким условиям должна удовлетворять подрешетка, допускающая такую реализацию?)

Упражнение 1.8. При подходе к точке на границе пространства стабильных кривых происходит стягивание одного или нескольких циклов на кривой. Сохраняется ли при этом решетка периодов? Другими словами, продолжается ли расслоение якобианов кривых с пространства модулей гладких кривых на пространство модулей стабильных кривых?

Определим теперь отображение μ, сопоставляющее всякому дивизору D нулевой степени на кривой C точку в якобиане $J(C)$ этой кривой. Для этого разобьем нули и полюса дивизора D на пары, $D = \sum(p_i - q_i)$, и положим

$$\mu(D) = \sum \int_{p_i}^{q_i};$$

мы рассматриваем это выражение как линейный функционал на пространстве голоморфных форм. Такой функционал не зависит от выбора путей, соединяющих точку q_i с точкой p_i: при замене такого пути другим он изменится на элемент решетки. Он не зависит и от выбора спаривания нулей и полюсов дивизора D: если, например, мы спарим q_1 с p_2, а q_2 с p_1, то функционал $\mu(D)$ изменится на интеграл по замкнутому пути, проходящему через точки q_1, p_1, q_2, p_2, а значит останется неизменным по модулю решетки Λ. Мы будем обозначать его также как $\int_D$.

Докажем, аналогично эллиптическому случаю, что при отображении μ любой главный дивизор переходит в нуль. Возьмем опять однопараметрическое семейство главных дивизоров $(f-\lambda)$. Ограничение отображения μ на это семейство задает голоморфное отображение проективной прямой в g-мерный комплексный тор. Поскольку $g > 1$, мы не можем воспользоваться тем, что сферой нельзя накрыть поверхность большего рода. Однако можно рассуждать следующим образом. Если образ нашей проективной прямой не точка, то возьмем (комплексный) касательный вектор к кривой-образу. Выберем теперь голоморфную 1-форму η на торе, значение которой на данном векторе отлично от нуля. Такая 1-форма существует, поскольку постоянные голоморфные 1-формы на универсальной накрывающей $\mathbf{C}^g$ тора инвариантны относительно сдвигов вдоль решетки и составляют кокасательное пространство в любой точке тора. Тогда поднятая на проективную прямую 1-форма $\mu^*\eta$ голоморфна на ней и отлична от тождественного нуля — приходим к противоречию, поскольку таких 1-форм на проективной прямой нет.

Тем самым, мы доказали в одном направлении следующее утверждение.

Теорема 1.9 (Абель). *Отображение μ из пространства дивизоров нулевой степени на комплексной кривой C в якобиан этой кривой обращается в нуль на главных дивизорах и только на них.*

Другими словами, отображение μ задает вложение факторгруппы группы дивизоров нулевой степени по подгруппе главных дивизоров в ней (*группы Пикара* кривой) в якобиан. Ниже мы докажем, что это отображение на самом деле является изоморфизмом, а пока займемся доказательством теоремы Абеля в обратную сторону.

Мы хотим доказать, что если $\mu(D) \equiv 0 \bmod \Lambda$ для некоторого дивизора D нулевой степени, то этот дивизор главный, $D = (f)$ для некоторой мероморфной функции f. Посмотрим, какими свойствами должен обладать логарифмический дифференциал

$$d \log f = \frac{df}{f}$$

мероморфной функции f с дивизором D. В произвольной голоморфной координате z в окрестности нуля порядка a функции f ее разложение начинается с $f(z) = cz^a + \ldots$, поэтому разложение ее логарифмического дифференциала в этой точке начинается с $adz/z + \ldots$. Аналогично, разложение логарифмического дифференциала в полюсе порядка a начинается с $-adz/z$. Других полюсов у логарифмического дифференциала нет. Тем самым, логарифмический дифференциал ненулевой мероморфной функции имеет лишь полюса первого порядка, причем его вычеты в этих полюсах определяют порядок нуля (соотв., полюса) в этой точке. Докажем сначала существование 1-формы с заданными вычетами.

Лемма 1.10. *Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — произвольный набор точек кривой C. Тогда для любого набора комплексных чисел $a_1, \ldots, a_s$, сумма которых равна нулю, существует мероморфная 1-форма ω с дивизором полюсов $p_1 + \ldots + p_s$, вычет которой в точке p_i равен a_i.*

Доказательство состоит в использовании формулы Римана–Роха

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Для дивизора $D = -(p_1 + \ldots + p_s)$, $s \geq 1$, имеем $d = -s$, а $l(D) = 0$, поскольку всякая голоморфная функция, обращающаяся в нуль хотя бы в одной точке, тождественно равна нулю. Поэтому

$$i(D) = g + s - 1.$$

Это означает, что пространство мероморфных 1-форм с дивизором полюсов D $(g+s-1)$-мерно, а значит любой набор вычетов в этих полюсах реализуется (ядро отображения, сопоставляющего всякой такой 1-форме набор ее вычетов, совпадает с g-мерным пространством голоморфных 1-форм).

Теперь для доказательства теоремы Абеля нам осталось показать, что к данной 1-форме η, имеющей дивизор полюсов $D = -(p_1 + \ldots + p_s)$ с фиксированными целыми вычетами a_i, мы можем добавить голоморфную 1-форму ω таким образом, что все периоды (интегралы по замкнутым кривым) 1-формы $\eta+\omega$ окажутся целочисленными. Для этого нам понадобится

2 Закон взаимности

Выберем на кривой C произвольную точку p и какой-нибудь набор путей $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$, $\beta_1, \ldots, \beta_g$ с началом и концом в точке p, обладающий следующими свойствами:

- любые два из выбранных путей пересекаются только в точке p;
- индекс пересечения любых двух из этих путей равен нулю, за исключением путей α_i, β_i с одинаковым индексом i, имеющих индекс пересечения 1.

Обозначим через S поверхность, которая получается в результате разрезания кривой C по путям α_i и β_i. Эта поверхность представляет собой $4g$-угольник.

Введем обозначение

$$\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega$$

для интеграла произвольной 1-формы ω по пути γ.

Теорема 2.1 (Первый закон взаимности). *Пусть ω — голоморфная, а η — мероморфная с дивизором полюсов $D = p_1 + \ldots + p_s$ 1-формы на кривой C (мы предполагаем, что полюса 1-формы η не лежат на ∂S). Тогда*

$$\sum_{k=1}^{g} (\alpha_k(\omega)\beta_k(\eta) - \beta_k(\omega)\alpha_k(\eta)) = 2\pi i \sum_{p_j} \left(\mathrm{Res}_{p_j} \eta\lambda(p_j)\right),$$

где $\lambda(s) = \int_p^s \omega$, причем интеграл берется по путям, лежащим внутри многоугольника S.

Выведем из первого закона взаимности утверждение теоремы Абеля. Докажем сначала, что в пространстве голоморфных 1-форм на C можно выбрать нормализованный базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$, состоящий из 1-форм, периоды которых по циклам α_i имеют вид $\alpha_i(\omega_j) = \delta_{ij}$. Для этого достаточно показать, что если все α-периоды некоторой голоморфной 1-формы равны нулю, то она сама нулевая.

Пусть ω, ϕ — две голоморфные 1-формы, λ — функция на многоугольнике S, построенная по 1-форме ω, как в лемме. Тогда

$$\int_C \omega \wedge \overline{\phi} = \int_{\partial S} \lambda\overline{\phi} = \sum(\alpha_i(\omega)\overline{\beta_i(\phi)} - \beta_i(\omega)\overline{\alpha_i(\phi)}),$$

где первое равенство вытекает из формулы Стокса. Если $\phi = \omega$, то сквозное равенство принимает вид

$$\int_C \omega \wedge \overline{\omega} = \sum(\alpha_i(\omega) \wedge \overline{\beta_i(\omega)} - \beta_i(\omega) \wedge \overline{\alpha_i(\omega)}).$$

Для неравной тождественно нулю 1-формы выражение слева в этом равенстве положительно, тогда как все слагаемые справа равны нулю, если все α-периоды 1-формы ω нулевые. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Прибавив теперь к мероморфной 1-форме с заданными целыми вычетами в полюсах первого порядка подходящую голоморфную 1-форму, мы добьемся того, чтобы α-периоды 1-формы η стали нулевыми. Ее β-периоды можно вычислить, применив закон взаимности к паре 1-форм ω_j, η, что немедленно дает

$$\beta_j(\eta) = 2\pi i \sum(\mathrm{Res}(\eta \int_D \omega_j)),$$

где суммирование идет по всем полюсам 1-формы η.

Воспользуемся теперь предположением теоремы: $\mu(D) = \int_D$ является элементом решетки Λ. Это означает, что существует цикл γ, такой что $\int_D = \int_\gamma$, а значит

$$\beta_j(\eta) = \int_\gamma \omega_j \text{ для } j = 1, \ldots, g.$$

Положим

$$\eta' = \eta - \sum_{k=1}^{g} (\gamma, \beta_k)\omega_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta_j(\eta') &= \beta_j(\eta) - \sum_{k=1}^{g} (\gamma, \alpha_k)\beta_j(\omega_k) \\ &= (\gamma, \alpha_k), \end{aligned}$$

а значит как α-, так и β-периоды 1-формы η' являются целыми.

Для доказательства первого закона взаимности рассмотрим на замыкании $\overline{S}$ многоугольника S голоморфную функцию $\lambda(s) = \int_p^s \omega$. Подсчитаем интеграл $\int_{\partial S} \lambda\eta$ двумя способами, получив две стороны закона взаимности.

Этот интеграл равен, с одной стороны, сумме вычетов 1-формы $\lambda\eta$ в ее полюсах, умноженной на $2\pi i$ т.е.

$$2\pi i \sum_{p_j} \lambda(p_j)\mathrm{Res}_{p_j}\eta.$$

С другой стороны, его значение можно посчитать, проинтегрировав 1-форму по паре соответственных сторон многоугольника S. Интеграл по паре сторон $\alpha_k + \alpha_k^{-1}$ будет равен

$$\int_{\alpha_k+\alpha_k^{-1}} \lambda\eta = -\beta_k(\omega)\alpha_k(\eta).$$

Это вытекает из того факта, что для любой пары соответственных точек q, q' на путях α_k, α_k^{-1} имеем

$$\lambda(q') - \lambda(q) = \int_q^{q'} \omega = \beta_k(\omega).$$

Для интегрирования по путям β ситуация аналогична.

Упражнение 2.2. Обозначим через $\mathrm{ord}_x f$ порядок мероморфной функции $f : C \to \mathbf{CP}^1$ в точке x кривой C. (*Порядок* функции в точке равен 0, если в этой точке у нее нет нуля или полюса, и он равен a, если разложение функции в любой координате с центром в выбранной точке начинается с $f(z) = cz^a + \ldots$.) Докажите *закон взаимности Вейля*: если у двух мероморфных функций f, g на кривой C нет общих нулей и полюсов, то

$$\prod_{x\in C} f(x)^{\mathrm{ord}_x g} = \prod_{x\in C} g(x)^{\mathrm{ord}_x f}.$$

(Обратите внимание на то, что в рассматриваемых произведениях лишь конечное число членов отлично от 1: слева это нули и полюса функции g, справа — нули и полюса функции f.)

Указание: Выведите закон взаимности для логарифмических дифференциалов функций f и g.

3 Теоремы Якоби и Римана

Теорема Абеля позволяет определить отображение любой степени C^m кривой C в якобиан этой кривой. Зафиксируем точку p на кривой для набора точек $q_1, \ldots, q_m \in C$ положим

$$(q_1, \ldots, q_m) \mapsto \int_p^{q_1} + \ldots + \int_p^{q_m},$$

где сумма в правой части рассматривается как линейный функционал на пространстве $\Omega(C)$. Очевидно, что выражение в правой части не меняется при перестановке точек q_i, и поэтому отображение определено, на самом деле, на симметрической степени $C^(m)$ кривой C. Здесь под симметрической степенью мы подразумеваем факторпространство декартовой степени C^m по действию симметрической группы m-го порядка перестановками индексов.

Упражнение 3.1. Докажите, что m-ая симметрическая степень гладкой комплексной кривой является гладким m-мерным комплексным многообразием.

Упражнение 3.2. Как выглядит m-ая симметрическая степень комплексной проективной прямой?

Упражнение 3.3. Как выглядит симметрический квадрат эллиптической кривой?

Особый интерес представляют отображения самой кривой ($m = 1$), ее $(g-1)$-ой и g-ой симметрических степеней.

Упражнение 3.4. Докажите, что для отображение кривой рода $g = 2$ в ее якобиан является изоморфизмом на образ.

Образ отображения $(g-1)$-ой симметрической степени кривой является подмногообразием коразмерности 1 в якобиане, а значит представляет некоторый класс его вторых когомологий $H^2(J(C),\mathbf{C})$ (значение такого класса на классе вторых гомологий равно индексу пересечения подмногообразия с поверхностью, представляющей указанный класс вторых гомологий). С другой стороны, на якобиане существует выделенный класс вторых когомологий, представленный 2-формой

$$\sum_{i=1}^{g} d\alpha_i \wedge d\beta_i,$$

где мы по-прежнему понимаем α_i, β_j как линейные функционалы на пространстве голоморфных 1-форм. Этот класс не зависит от выбора базиса гомологий α_i, β_j: матрица замены базиса является симплектической с определителем 1.

Упражнение 3.5. Докажите это утверждение.

Следующее утверждение мы приводим без доказательства.

Теорема 3.6 (Риман). *Описанные выше два класса вторых когомологий якобиана совпадают.*

g-ая симметрическая степень $C^{(g)}$ кривой C, как и якобиан, является g-мерным многообразием. Однако якобиан устроен проще — это тор. Отображение $C^{(g)} \to J(C)$ позволяет отождествить открытое подмножество в $C^{(g)}$ с открытым подмножеством в якобиане. Именно, справедлива следующая

Теорема 3.7 (Якоби). *В общей точке это отображение обратимо.*

Для доказательства докажем существование точки в $C^{(g)}$, в которой отображение обратимо. Мы будем искать такую точку $(q_1,\dots,q_g)$, в которой все точки q_i попарно различны. Зафиксируем произвольный базис $\omega_1,\dots,\omega_g$ пространства голоморфных 1-форм на C. Пусть $q_1 \in C$ — произвольная точка, в которой 1-форма ω_1 отлична от нуля. Изменим 1-формы $\omega_2,\dots,\omega_g$, вычтя из них подходящие кратные 1-формы ω_1, таким образом, чтобы вновь построенные 1-формы обращались в нуль в точке q_1. Зафиксируем координату z_1 в окрестности точки q_1. Точку q_2, отличную от q_1, подберем таким образом, чтобы 1-форма ω_2 была в ней отлична от нуля. Вычтя из 1-форм $\omega_3,\dots,\omega_g$ подходящие кратные 1-формы ω_2, добьемся того, чтобы их значения в точке q_2 были равны нулю. Зафиксируем координату z_2 в окрестности точки q_2.

Продолжив эту процедуру, мы получим набор различных точек $q_1,\dots,q_g$, набор координат z_i в их окрестностях и базис $\{\omega_j\}$ в пространстве голоморфных 1-форм, такой, что $\omega_j(q_i) = 0$ при $i < j$, $\omega_j(q_j) \neq 0$. Координаты z_j задают систему локальных координат в окрестности точки $(q_1,\dots,q_g) \in C^{(g)}$. Матрица Якоби отображения $C^{(g)} \to J(C)$ в этой окрестности, относительно базиса ω_j, имеет вид (ω_j/dz_i), и в центре окрестности она оказывается верхнетреугольной с ненулевыми элементами по диагонали. Это означает, что она невырождена, и теорема Якоби доказана.