Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 2. Формула Римана–Гурвица. Род алгебраической кривой.

1 Формула Римана–Гурвица

В предыдущей лекции было описано, как задавать комплексную кривую в виде разветвленного накрытия другой комплексной кривой. При этом род накрывающей кривой можно восстановить по данным ветвления и роду накрываемой кривой. Это — чисто топологическое утверждение, не требующее привлечения комплексной структуры. Ниже, если не оговорено противное, мы имеем дело со связными компактными поверхностями.

Предположим сначала, что мы имеем дело с *не*разветвленным накрытием. Рассмотрим на накрываемой поверхности связный граф, разбивающий ее на клетки — *грани*. Это означает, что при выкидывании графа из поверхности она распадается на несвязные куски, каждый из которых гомеоморфен диску.

Упражнение 1.1 *Может ли несвязный граф разбивать поверхность на клетки?*

Упражнение 1.2 *Докажите, что на поверхности любого рода можно нарисовать граф, дополнение к которому — одна клетка.*

Как хорошо известно, число вершин, ребер и граней графа на поверхности связаны *соотношением Эйлера*

$$V - E + F = 2 - 2g,$$

где V — число вершин, E — число ребер, F — число граней графа, а g — род разбиваемой поверхности. Это соотношение означает, что выражение в левой части не зависит от выбора графа; его можно понимать как определение рода поверхности. Общее значение левой и правой частей называется *эйлеровой характеристикой* поверхности.

Обозначим степень накрытия через d. Рассмотрим прообраз выбранного графа на накрывающей поверхности. Это тоже связный граф, и у него dV вершин, dE ребер и dF граней.

Упражнение 1.3 *Докажите, что поднятый граф на накрывающей поверхности действительно связен.*

Поэтому эйлерова характеристика накрывающей поверхности равна

$$d(V - E + G) = d(2 - 2g),$$

а значит ее род есть

$$d(g - 1) + 1,$$

где g — род накрываемой поверхности. Это и есть формула Римана–Гурвица для неразветвленных накрытий. Из нее вытекает в частности, что сферу можно накрыть только сферой, да и то лишь с кратностью 1, а тор — только тором.

Если накрытие разветвленное, то ситуация несколько усложняется. Наложим дополнительное условие на граф, выбираемый на накрываемой поверхности: потребуем, чтобы все точки ветвления накрытия были вершинами графа (у него могут быть и другие вершины). Тогда прообраз графа на накрывающей поверхности содержит dE ребер, dF клеток, однако число его вершин будет меньше, чем dV. Действительно, число прообразов точки ветвления равно числу длин циклов перестановки монодромии вокруг этой вершины.

Поэтому формула Римана–Гурвица для случая разветвленного накрытия имеет следующий вид: эйлерова характеристика накрывающей поверхности равна

$$d(2-2g)-\sum(\nu_x-1),$$

где ν_x — кратность функции f в точке x накрывающей поверхности, и суммирование ведется по всем точкам x. *Кратность* функции f в точке x — это число близких к x прообразов у точки $f(x)$. Заметим, что кратность почти всех точек x равна единице, поэтому ненулевой вклад в сумму дают только *критические точки* функции, т.е. те, кратность которых больше 1. Их число конечно, и все они лежат в прообразах точек ветвления.

Упражнение 1.4 *Докажите, что в окрестности точки кратности ν функции f эта функция в подходящих координатах в образе и прообразе имеет вид $x \mapsto x^\nu$.*

Упражнение 1.5 *Докажите формулу Римана–Гурвица, избрав в качестве отправной точки граф, у которого точки ветвления находятся не в вершинах, а на гранях, причем на каждой грани лежит не более одной такой точки.*

Упражнение 1.6 *Найдите род кривой Ферма $x^n+y^n=z^n$.*

Упражнение 1.7 *Выведите из формулы Римана–Гурвица, что группа автоморфизмов поверхности рода g, $g\geq 2$, не может содержать больше, чем $84(g-1)$ элементов.*
Указание:] *Воспользуйтесь следующим соображением. Рассмотрим факторкривую кривой C по действию конечной группы G ее автоморфизмов, состоящей из d элементов, $f: C\to C/G$. Тогда порядки ветвления отображения f во всех точках ветвления с общим критическим значением одинаковы. Обозначим порядок ветвелния над i-ым критическим значением через r_i, $i=1,\dots,c$. По формуле Римана–Гурвица*

$$(2g-2)/d=2g(C/G)-2+\sum_{i=1}^{c}(1-1/r_i),$$

и величину d можно оценить, воспользовавшись тем, что $g\geq 2$ и $g(C/G)>0$.

Упражнение 1.8 *Придумайте пример комплексной кривой рода $g\geq 2$ с группой автоморфизмов порядка 84.*

2 Мероморфные функции на алгебраической кривой

Как задать функцию на алгебраической кривой в проективном пространстве? Если взять плоскую кривую и рассмотреть ее в какой-нибудь карте, то любая координата задает функцию на кривой; точнее — на той ее части, которая попала в эту карту. Однако не все точки кривой попадают в данную карту. Действительно, дополнение к карте представляет собой прямую, и эта прямая пересекает кривую степени d в d точках (если кривая и прямая находятся в общем положении; если это не так, то точек пересечения меньше d, но все равно по крайней мере одна такая точка есть). Как следует продолжить такую функцию в исключительные точки? Единственный разумный выход — положить ее там равной ∞. Такие проекции являются примером мероморфных функций. Под *мероморфной функцией* на комплексной кривой мы будем понимать голоморфное отображение кривой в проективную прямую $\mathbf{CP}^1$. Проекция плоской кривой является таким голоморфным отображением, однако мероморфные функции можно строить и многими другими способами.

С топологической точки зрения, непостоянная мероморфная функция является разветвленным накрытием сферы. Степень этого накрытия называется *степенью* мероморфной функции. Степень постоянной функции равна нулю. Если на проективной прямой в образе мероморфной функции введена координата, то прообразы нуля в этой координате называются *нулями* функции, а прообразы бесконечности — ее *полюсами*.

Пример 2.1 *Зафиксируем на рациональной кривой $\mathbf{CP}^1$ какую-нибудь координату x, а на ее образе — координату t. Тогда всякая* рациональная *функция на этой кривой, т.е. отношение двух многочленов*

$$t = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_m}{q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \ldots + q_n},$$

не имеющих общих корней, является мероморфной. Ясно, что всюду кроме тех точек, где у нее полюса, а также точки $x = \infty$, рациональная функция является голоморфным отображением. Проверим, что это так и в любом полюсе. Для этого сделаем замену координаты $t = 1/s$ в образе. В новой координате наше отображение приобретает вид

$$s = \frac{Q(x)}{P(x)},$$

и его голоморфность становится очевидной.

Упражнение 2.2 *Проверьте, что рациональное отображение голоморфно и в точке $x = \infty$.*

Важным свойством мероморфных функций на кривой является то, что они образуют поле.

Теорема 2.3 *Зафиксируем в проективной прямой-образе координату t. Тогда сумма, разность, произведение и частное двух мероморфных функций на кривой, а также произведение мероморфной функции на число являются мероморфными функциями.*

Заметим, что если координата в образе не выбрана, то все эти арифметические действия просто не определены. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда считаем, что в прямой образе зафиксирована координата.

Доказательство теоремы остается в качестве упражнения.

Пример 2.4 *Докажем, что всякая мероморфная функция на рациональной кривой является рациональной в любой координате x в прообразе и любой координате t в образе. Будем предполагать для простоты, что точка $x = \infty$ не является ни нулем, ни полюсом функции относительно координаты t, и что ни одна из точек $t = 0$ и $t = \infty$ не является точкой ветвления функции. Тогда у каждой из точек $t = 0$ и $t = \infty$ одинаковое число d прообразов — степень соответствующего разветвленного накрытия. Возьмем в качестве многочлена P многочлен степени d, корнями которого являются все нули нашей мероморфной функции, а в качестве многочлена Q — многочлен степени d, корнями которого являются полюса. Поделим теперь нашу исходную мероморфную функцию на рациональную функцию $P(x)/Q(x)$. Это частное — тоже мероморфная функция, но она не принимает значения 0 и ∞. Поэтому она просто постоянна, и утверждение доказано.*

Вот еще чрезвычайно важный способ строить мероморфные функции на кривых в проективном пространстве. Пусть кривая C вложена в проективное пространство $\mathbf{CP}^n$. Зафиксируем какие-нибудь однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ в этом пространстве. Рассмотрим два однородных многочлена P, Q степени d на этом пространстве. Мы предполагаем, что дробь P/Q несократима. Тогда частное P/Q определяет голоморфную функцию на проективном пространстве всюду, где знаменатель этой дроби не обращается в нуль. Действительно, если мы заменим проективные координаты $(x_0 : \ldots : x_n)$ такой точки координатами $(\lambda x_0 : \ldots \lambda x_n)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, то и числитель, и знаменатель дроби приобретут множитель λ^d, а значит значение самой дроби не изменится. Именно с этой целью мы брали в числителе и знаменателе однородные многочлены одинаковой степени.

Если потребовать дополнительно, чтобы знаменатель этой дроби не обращался в нуль на кривой C тождественно, от ограничение функции P/Q на кривую C определяет функцию всюду на C за исключением тех точек кривой, где знаменатель обращается в нуль. В эти же точки функция продолжается однозначно по непрерывности.

Замечание 2.5 *Возможность продолжить в выколотую точку по непрерывности функцию, ограниченную на кривую, не означает, что мы можем продолжить по непрерывности функцию на всем проективном пространстве. Дело в том, что результат может зависеть от выбранной кривой.*

Упражнение 2.6 *Проверьте, что результат продолжения функции x/y в начало координат плоскости $\mathbf{C}^2$ зависит от выбора кривой, вдоль которой мы ее продолжаем.*

Другие способы задания римановой поверхности также позволяют определить мероморфные функции на ней. Так, задавшись разветвленным накрытием проективной прямой, мы однозначно восстанавливаем не только комплексную структуру на накрывающей кривой, но и мероморфную функцию на ней: само это накрытие. Тем самым, данные ветвления — точки ветвления и набор перестановок монодромии вокруг них — задают пару (комплексная кривая, мероморфная функция на ней).

Если кривая задается в виде фактора комплексной кривой по дискретному действию группы, то любая мероморфная функция на исходной кривой, инвариантная относительно действия группы, опускается до мероморфной функции на факторкривой.

3 Теорема Безу

Легко доказать, что плоская кривая C степени d пересекает проективную прямую в d точках. Действительно, ограничив многочлен $F(x:y:z)$, задающий кривую C, на прямую, мы получаем многочлен степени d на этой прямой. У такого многочлена d нулей. Если выбранная прямая общая по отношению к кривой, то все d нулей различны, и точек пересечения в точности d. Если же прямая касается кривой в некоторых точках, то у многочлена имеются совпадающие корни. Кратность корня будем называть *кратностью пересечения* прямой и кривой в соответствующей точке. Сумма кратностей точек пересечения любой прямой с кривой степени d равна d. Теорема Безу обобщает это утверждение на случай пересечения двух кривых степени d_1 и степени d_2.

Теорема 3.1 (Безу) *Число точек пересечения двух кривых C_1 и C_2 степеней d_1 и d_2 соответственно с учетом кратностей равно $d_1 d_2$.*

Доказательство. Если кривая C_1 — прямая, то все доказано. Пусть это не прямая. Рассмотрим на плоскости произвольный набор из d_2 прямых, заданных линейными функциями $L_1, \dots, L_{d_2}$. Пусть H — уравнение кривой C_2. Ограничение дроби

$$\frac{H}{L_1 \dots L_{d_2}}$$

на кривую C_1 является мероморфной функцией на этой кривой. У этой функции $d_1 d_2$ полюсов, поскольку каждая из функций L_i имеет на ней d_1 нулей, а значит и $d_1 d_2$ нулей. Доказательство окончено.

Упражнение 3.2 *Докажите теорему Безу для числа точек пересечения кривой степени d в проективном пространстве произвольной размерности с гиперповерхностью степени D.*

4 Род плоской кривой

Формула Римана–Гурвица позволяет довольно просто подсчитать род плоской алгебраической кривой, если мы знаем ее степень. Род кривой степени один мы знаем: это просто проективная прямая, и ее род равен нулю. Если же степень кривой больше единицы, то мы можем с ней обойтись следующим образом.

Мы уже рассматривали проектирование плоской алгебраической кривой из точки, не лежащей на кривой, на проективную прямую. Для кривой степени d это разветвленное накрытие степени d. Что такое точка ветвления такого накрытия? Ясно, что это не что иное, как касательная к нашей кривой, проведенная через точку проектирования. Если точку проектирования выбрать общим образом, то все касательные, проходящие через нее, имеют лишь одну точку касания с кривой, причем порядок касания в этой точке равен 2. Это означает, что помимо точки касания наша касательная пересекает кривую еще в $d-2$ точках.

Ветвление вдоль касательных устроено простейшим возможным образом: это транспозиция, т.е. перестановка с цикловым типом $2^1 1^{d-2}$. (Эта запись означает, что в перестановке один цикл длины 2 и $d-2$ циклов длины 1.) Поэтому для вычисления рода кривой нам достаточно лишь подсчитать число таких касательных. Посмотрим, чему равно это число для кривых маленькой степени. Для прямой ($d = 1$) оно равно нулю. Для коники ($d = 2$) это число равно 2.

В общем случае, выберем на проективной плоскости координаты таким образом, чтобы точка $(0 : 1 : 0)$ не лежала на кривой C и рассмотрим проектирование из этой точки. В карте $z = 1$ эта проекция имеет вид проекции на ось x, и касательные прямые есть не что иное, как вертикальные касательные. Поэтому они задаются уравнением $\partial f/\partial y = 0$, где $f = f(x, y) = 0$ есть уравнение нашей кривой в выбранной карте. Таким образом, число касательных совпадает с числом точек в пересечении кривых $f = 0$ и $\partial f/\partial y = 0$ (точнее говоря, вместо второй кривой мы должны взять ее проективное замыкание, т.е. кривую на проективной плоскости, которая получается после превращения уравнения $\partial f/\partial y = 0$ в однородное уравнение от трех переменных). Степень первой кривой равна d, степень второй равна $d - 1$. Поэтому в их пересечении $d(d - 1)$ точек. Формула Римана–Гурвица теперь дает следующее значение для эйлеровой характеристики накрывающей кривой:

$$2d - d(d - 1) = 3d - d^2.$$

Поэтому род накрывающей поверхности равен

$$(2 - (3d - d^2))/2 = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Упражнение 4.1 *Вычислите род плоской кривой степени d, отправляясь от проектирования такой кривой из точки, лежащей на ней.*

Упражнение 4.2 *Рассмотрим проектирование кривой степени d в n-мерном проективном пространстве, $n \geq 3$. Чему равна степень проекции, если а) центр проектирования не лежит на кривой; б) центр проектирования принадлежит кривой.*

Упражнение 4.3 *Найдите род плоской* гиперэллиптической кривой*, заданной в карте $z = 1$ уравнением $y^2 = P_n(x)$, где P_n — многочлен степени n с n попарно различными корнями.*